

Sinkende Kugeln*

Aufgabennummer: B_407

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Die Sinkgeschwindigkeit einer in einer Flüssigkeit sinkenden Metallkugel kann durch eine Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = g \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in Sekunden (s)

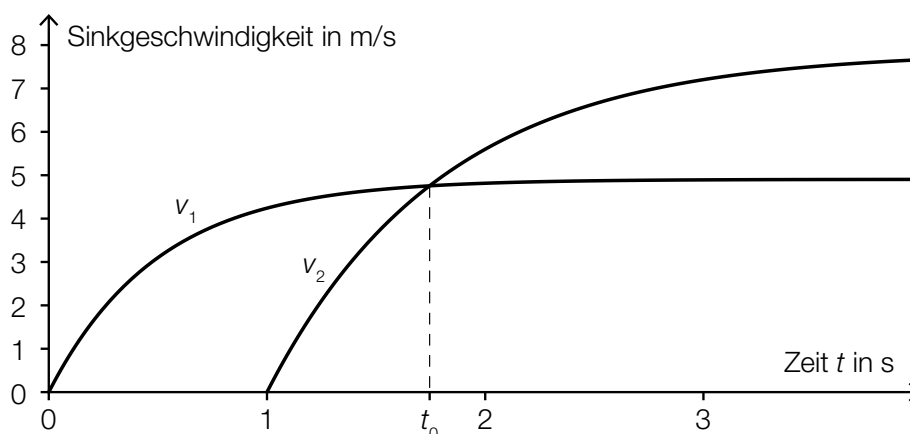
$v(t)$... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

τ ... Zeitkonstante in s mit $\tau > 0$

g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$)

- a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Sinkgeschwindigkeit ständig zunimmt.
- b) Eine Kugel K_2 beginnt 1 Sekunde nach einer Kugel K_1 zu sinken.

In der nachstehenden Grafik sind die Sinkgeschwindigkeit v_1 der Kugel K_1 und die Sinkgeschwindigkeit v_2 der Kugel K_2 dargestellt. Die Zeitkonstante der Sinkgeschwindigkeit v_2 beträgt $\tau_2 = 0,8 \text{ s}$.



- Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion v_2 für $t \geq 1$.

Zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung der Kugel K_2 größer als die Beschleunigung der Kugel K_1 .

- Beschreiben Sie, wie man dies in der obigen Grafik erkennen kann.

- c) Die Sinkgeschwindigkeit einer bestimmten Kugel kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = g \cdot 0,25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,25}}\right) \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in s

$v(t)$... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

- Berechnen Sie denjenigen Weg, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt.

Im Zeitintervall $[0; t_1]$ legt die Kugel einen Weg von 8 m zurück.

- Bestimmen Sie die Zeit t_1 .

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für größer werdendes t wird $e^{-\frac{t}{\tau}}$ immer kleiner und damit $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ immer größer.

$$b) v_2(t) = g \cdot 0,8 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-1}{0,8}}\right)$$

An der Stelle t_0 ist die Steigung der Funktion v_2 größer als die Steigung der Funktion v_1 .

$$c) s(1) = \int_0^1 g \cdot 0,25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,25}}\right) dt = 1,8506...$$

In der ersten Sekunde legt die Kugel rund 1,85 m zurück.

$$s(t_1) = 8$$

$$\int_0^{t_1} g \cdot 0,25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,25}}\right) dt = 8$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$t_1 = 3,51...$$

$$(t_2 = -0,70...)$$

Die Kugel benötigt rund 3,5 Sekunden, um diesen Weg zurückzulegen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung

b) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion v_2

1 × C: für die richtige Beschreibung

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung desjenigen Weges, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt

1 × B2: für das richtige Bestimmen der Zeit t_1