

Kalt – warm (1)*

Aufgabennummer: B_394

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) In der unten stehenden Grafik ist ein Erwärmungsvorgang dargestellt, der durch die Funktion T beschrieben wird:

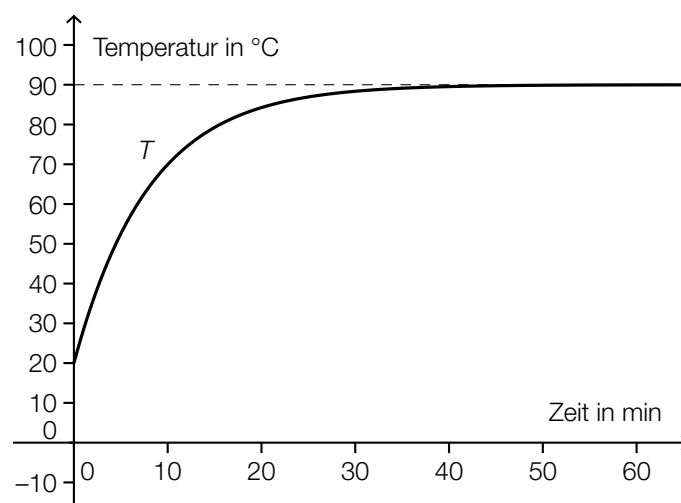
$$T(t) = a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{8}}) + 20 \quad \text{mit } t \geq 0$$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min

$T(t)$... Temperatur zur Zeit t in °C

a ... Konstante

Der Graph dieser Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



- Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Konstante a .
- Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{1}{b} \cdot \int_0^b T(t) dt = 60 \text{ °C}$$

b) Der Temperaturverlauf von abkühlendem Wasser wird durch die Funktion T beschrieben:

$$T(t) = 8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}} \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min

$T(t)$... Temperatur des Wassers zur Zeit t in °C

- Stellen Sie den Temperaturverlauf in den ersten 5 Stunden grafisch dar.
- Stellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von T zur Zeit $t = 0$ auf.

Die Tangente soll zur näherungsweisen Beschreibung des Temperaturverlaufs verwendet werden. Dabei werden Abweichungen von maximal 2 °C toleriert.

- Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem die Abweichung maximal 2 °C beträgt.

c) Folgende Differenzialgleichung beschreibt den Temperaturverlauf eines abkühlenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U) \text{ mit } T > T_U$$

t ... Zeit

T ... Temperatur

T_U ... Umgebungstemperatur (konstant)

k ... Konstante

Dabei nähert sich die Temperatur T des abkühlenden Körpers der Umgebungstemperatur T_U .

- Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, welches Vorzeichen k haben muss.
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
- Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $T(0) = T_0$.

Hinweis zur Aufgabe:

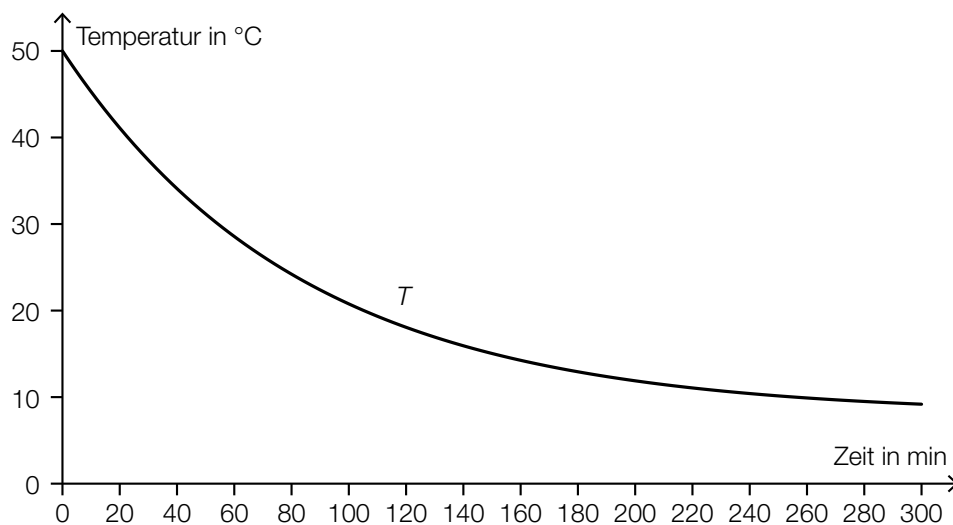
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $a = 70$

Im Intervall $[0; b]$ beträgt die mittlere Temperatur 60°C .

b)



Gleichung der Tangente(nfunktion): $f(t) = k \cdot t + d$

$$k = T'(0) = -0,5$$

$$d = 50$$

$$\Rightarrow f(t) = -0,5 \cdot t + 50$$

$$8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}} - (-0,5 \cdot t + 50) = 2$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz für $t > 0$: $t = 27,3\dots$

Zeitintervall: $[0; 27]$

c) Für $T > T_U$ handelt es sich um einen Abnahmeprozess, also muss $\frac{dT}{dt}$ negativ sein.
Da $(T - T_U)$ positiv ist, muss also k negativ sein.

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U)$$

$$\frac{dT}{T - T_U} = k \cdot dt \quad (\text{oder: } \frac{T'}{T - T_U} = k)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_U} = k \cdot \int dt \quad (\text{oder: } \int \frac{T'(t)}{T(t) - T_U} dt = k \cdot \int dt)$$

$$\ln|T(t) - T_U| = k \cdot t + C_1$$

$$\text{allgemeine Lösung: } T(t) = T_U + C \cdot e^{k \cdot t}$$

$$T(0) = T_0 \Rightarrow T_0 = T_U + C$$

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{k \cdot t}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Konstanten a
1 × C2: für die richtige Interpretation der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang
- b) 1 × B1: für das richtige Darstellen des Temperaturverlaufs in den ersten 5 Stunden
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Tangente
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls
- c) 1 × D: für die richtige Argumentation
1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lösung mit $T(0) = T_0$