

Flugbahnen*

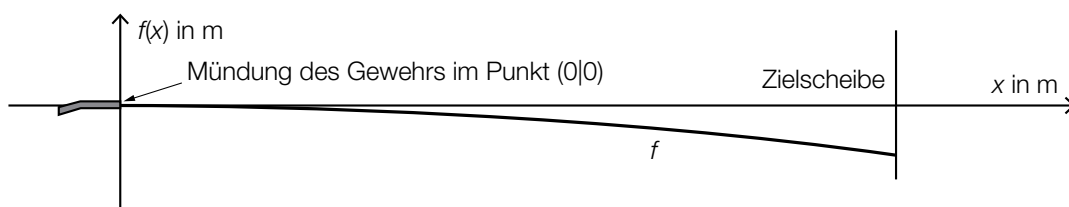
Aufgabennummer: B_389

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Ein Gewehr wird so eingespannt, dass der Lauf des Gewehrs waagrecht verläuft. Beim Schießen auf eine Zielscheibe trifft das Projektil im Vergleich zur Abschusshöhe tiefer auf (siehe nachstehende Skizze).



Die Flugbahn eines Projektils kann unter Vernachlässigung des Luftwiderstands näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 2. Grades f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

- Begründen Sie, warum für die dargestellte Flugbahn gilt: $b = 0$ und $c = 0$.
- Begründen Sie anhand des Funktionsgraphen, warum a negativ sein muss.

Die Zielscheibe ist in horizontaler Richtung 100 Meter von der Mündung des Gewehrs entfernt.

Das Projektil trifft im Vergleich zur Abschusshöhe um 8 Zentimeter tiefer auf der Zielscheibe auf.

- Berechnen Sie den Parameter a .

- b) Die Flugbahn eines schräg nach oben abgeschossenen Projektils kann durch den Graphen einer Funktion h beschrieben werden:

$$h(x) = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

x ... horizontal zurückgelegte Wegstrecke in Metern (m)

$h(x)$... Höhe an der Stelle x in m

v ... Abschussgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)

g ... Erdbeschleunigung (konstant)

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$... Abschusswinkel (gemessen von der Horizontalen)

Für eine spezielle Flugbahn gilt:

$$h(x) = 0,03492 \cdot x - \frac{g}{7,192 \cdot 10^5} \cdot x^2$$

– Bestimmen Sie die zugehörige Abschussgeschwindigkeit v .

- c) Ein Geschoss, das unter einem Winkel α abgeschossen wird, trifft nach der Schussweite $x(\alpha)$ wieder auf dem Boden auf. Dabei gilt näherungsweise:

$$x(\alpha) = \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

α ... Abschusswinkel mit $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$x(\alpha)$... Schussweite bei einem Abschusswinkel α in m

v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s

g ... Erdbeschleunigung (konstant)

– Berechnen Sie denjenigen Winkel, bei dem die Schussweite am größten ist.

– Zeigen Sie mithilfe der 2. Ableitung, dass für diesen berechneten Winkel die Schussweite maximal sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Da sich der Scheitel der dargestellten Parabel im Ursprung des Koordinatensystems befindet, gilt: $b = 0$ und $c = 0$.

Da der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist, gilt: $a < 0$.

$$-0,08 = a \cdot 100^2 \Rightarrow a = -8 \cdot 10^{-6}$$

- b) Koeffizientenvergleich:

$$0,03492 = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 1,99...^\circ$$

$$7,192 \cdot 10^5 = 2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(1,99...^\circ) \Rightarrow v = 600,0... \approx 600$$

Die Abschussgeschwindigkeit beträgt rund 600 m/s.

- c) $\frac{dx}{d\alpha} = 0$:

$$\frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$$\frac{d^2x}{d\alpha^2} < 0 \text{ für } \alpha = 45^\circ:$$

$$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = -\frac{8 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) < 0, \text{ wenn } 0 < \alpha < 90^\circ$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D1: für die richtige Begründung zu den Parametern b und c
 1 × D2: für die richtige Begründung zum Vorzeichen des Parameters a
 1 × B: für die richtige Berechnung des Parameters a
- b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung von α (Koeffizientenvergleich)
 1 × B: für die richtige Berechnung der Abschussgeschwindigkeit
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels
 1 × D: für den richtigen Nachweis