

Waschmittel (2)*

Aufgabennummer: B_381

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Die Firma Blitzweiß produziert ein neues Waschmittel.

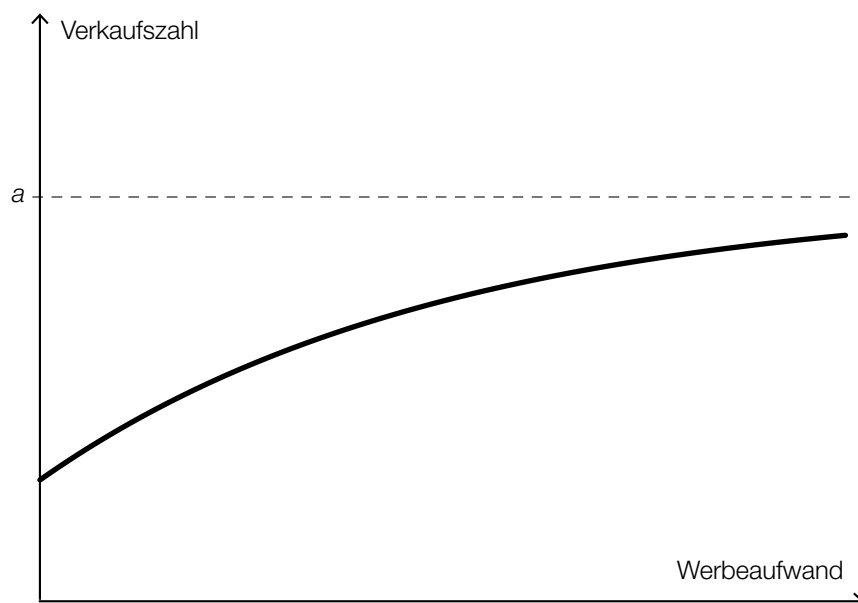
- a) Die Abhängigkeit der Verkaufszahlen vom Werbeaufwand x kann für einen Monat modellhaft durch die Funktion V beschrieben werden:

$$V(x) = a - b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

a, b, λ sind positive Parameter der Funktion mit $a > b$.

- Ermitteln Sie unter Verwendung der Parameter von V die Verkaufszahl, wenn kein Werbeaufwand betrieben wird.
- Begründen Sie mathematisch, warum für $x \rightarrow \infty$ die Funktion V asymptotisch gegen a strebt.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V für einen bestimmten Wert λ_1 .



- Zeichnen Sie den Funktionsverlauf für einen Wert λ_2 mit $\lambda_2 > \lambda_1$ in die obige Abbildung ein. (Die Parameter a und b bleiben unverändert.)

- b) Die Kostenfunktion K für die Produktion eines Tages kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Produktionskosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

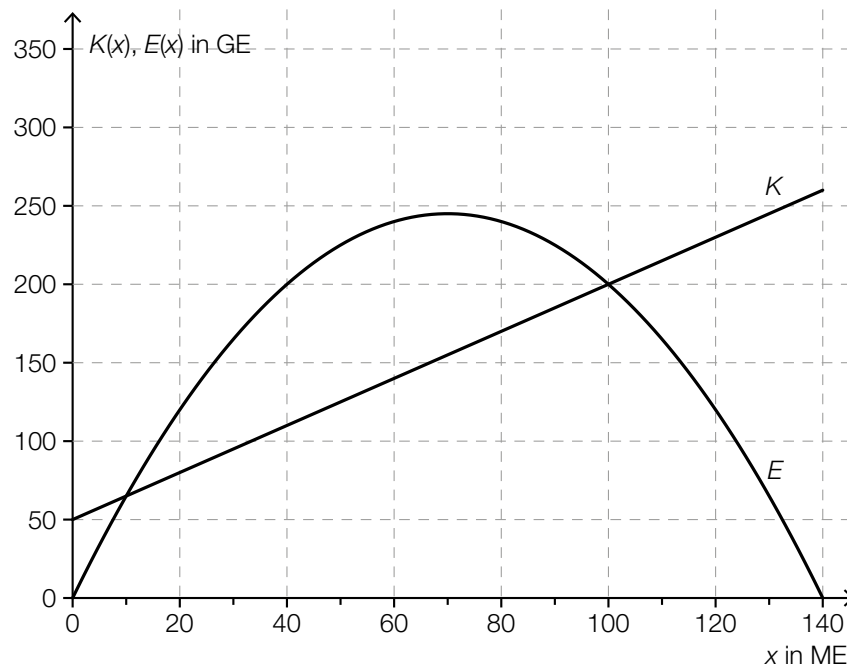
Folgende Informationen sind verfügbar:

Die Fixkosten betragen € 500.

x in ME	20	30	50
$K(x)$ in GE	604	672	920

- Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a , b , c und d in Matrixform auf.
- Berechnen Sie die Parameter a , b , c und d .

- c) In der nachstehenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt.



- Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
- Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der obigen Abbildung.
- Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

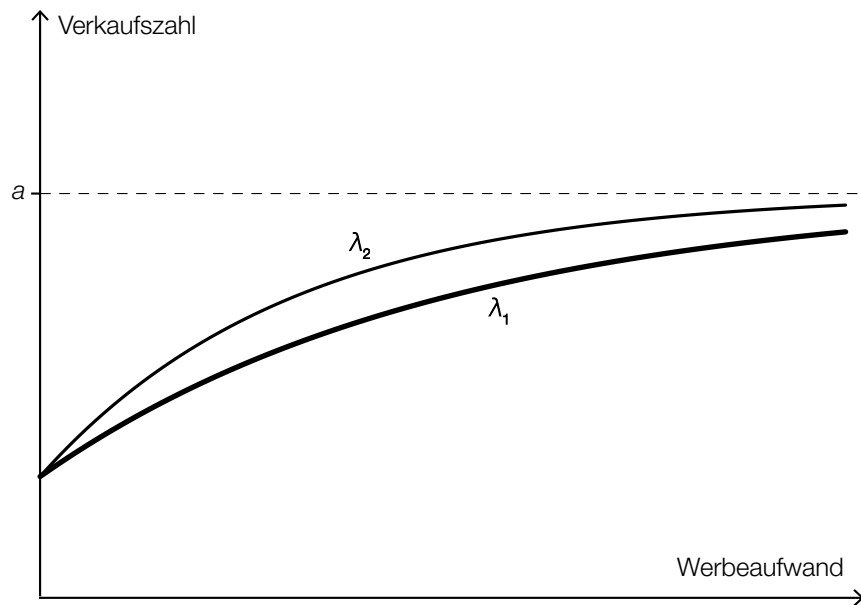
Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: $V(0) = a - b$

Wenn x gegen unendlich geht, strebt $e^{-\lambda \cdot x}$ und daher auch das Produkt $b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegen 0 und V somit gegen a .

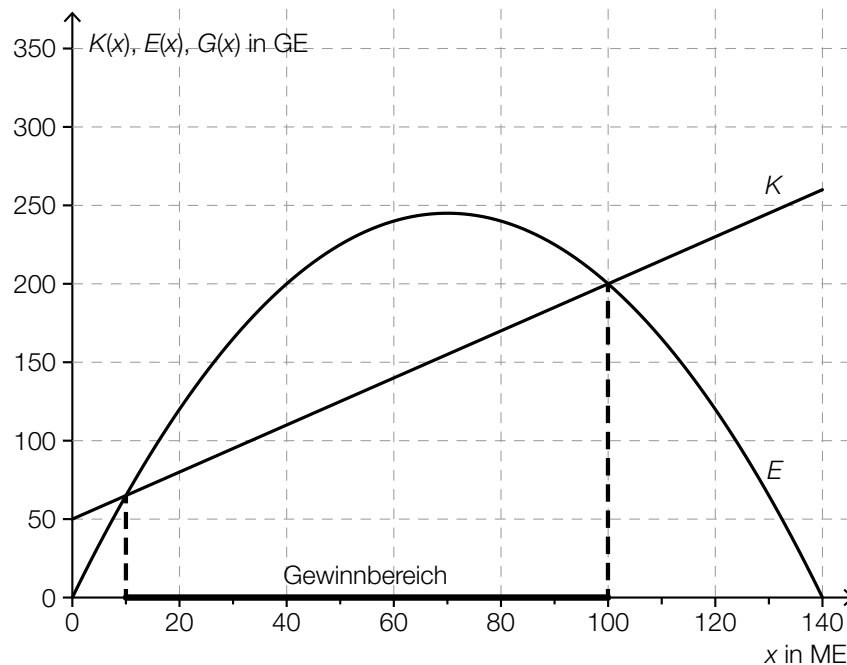


$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8000 & 400 & 20 & 1 \\ 27000 & 900 & 30 & 1 \\ 125000 & 2500 & 50 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 604 \\ 672 \\ 920 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{1}{375}, \quad b = -\frac{2}{25}, \quad c = \frac{86}{15} \quad \text{und} \quad d = 500$$

- c) Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $K(0) = 50$ und $K(100) = 200$
 $\Rightarrow K(x) = 1,5 \cdot x + 50$



Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$.

Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Verkaufszahl ohne Werbeaufwand unter Verwendung der Parameter der Funktion
 1 × D: für die richtige Erklärung, warum für wachsende x die Verkaufszahlen V gegen a streben
 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsverlaufs (Startwert und charakteristischer Verlauf einer Sättigungsfunktion, wobei die Kurve mit λ_2 oberhalb der gegebenen Kurve verläuft)
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems in Matrizenform
 1 × B: für die richtige Berechnung der Parameter
- c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Kostenfunktion
 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Gewinnbereichs
 1 × D: für die richtige mathematische Erklärung