

Lichtwellenleiter*

Aufgabennummer: B_379

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels

$I(x)$... Lichtintensität in der Entfernung x

I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels

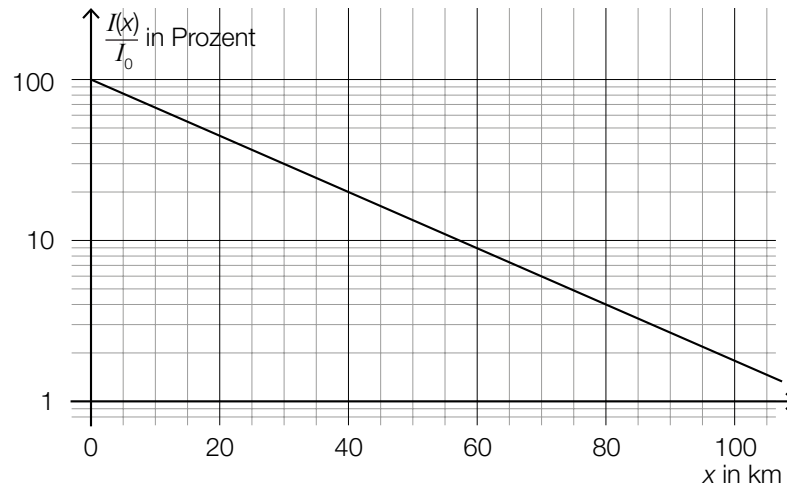
λ ... positive Konstante

a) Dabei wird angenommen, dass die lokale Änderungsrate der Lichtintensität in Abhängigkeit von der Entfernung proportional zur jeweils vorhandenen Lichtintensität ist.

- Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-\lambda$ ($\lambda > 0$).
- Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Lösung dieser Differenzialgleichung mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ durch $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegeben ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Die Lichtintensität (in Prozent von I_0) in einem Glasfaserkabel in Abhängigkeit von x wird in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem folgendermaßen dargestellt:



- Ermitteln Sie, wie viel Prozent an Intensität das Licht nach 80 Kilometern (km) verloren hat.

Um Signale zu übertragen, muss die Lichtintensität noch mindestens 20 % der Lichtintensität I_0 betragen.

- Lesen Sie die maximale Länge eines Lichtwellenleiters ab, der diese Bedingung erfüllt.
- Ermitteln Sie den Wert des Parameters λ mithilfe der in der obigen Abbildung dargestellten Exponentialfunktion.

- c) Um den Intensitätsverlust in einem Lichtwellenleiter zu bestimmen, wird die nach 1 km noch vorhandene Intensität gemessen.

Die Größe zur Beschreibung des Intensitätsverlusts ist die Dämpfung D , die in Dezibel angegeben wird:

$$D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right) \text{ in Dezibel (dB)}$$

I_0 ... Anfangsintensität

I ... noch vorhandene Intensität nach 1 km

Ein modernes Glasfaserkabel weist nach 1 km noch eine Intensität von 95,5 % des Anfangswertes I_0 auf.

- Berechnen Sie, welcher Dämpfung dies entspricht.

Bei älteren Glasfaserkabeln stellte man pro Kilometer Kabellänge eine Dämpfung von 20 dB fest.

- Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität I_0 nach 1 km noch vorhanden waren.

Für die Dämpfung wird oft auch die Formel $D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ angegeben.

- Zeigen Sie mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen: $D_1 = -D$.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dI}{dx} = -\lambda \cdot I$

$$\frac{dI}{I} = -\lambda \cdot dx \quad (\text{oder: } \frac{I'}{I} = -\lambda)$$

$$\int \frac{dI}{I} = -\lambda \int dx \quad (\text{oder: } \int \frac{I'(x)}{I(x)} dx = -\lambda \int dx)$$

$$\ln|I| = -\lambda \cdot x + C_1$$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = C \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$:

$$I_0 = C$$

spezielle Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

b) An der Stelle $x = 80$ gilt: $\frac{I(80)}{I_0} = 4 \%$.

Daher hat das Licht 96 % an Intensität verloren.

An der Stelle $x = 40$ gilt: $\frac{I(40)}{I_0} = 20 \%$.

Die maximale Länge des Lichtleiters beträgt also 40 km.

$$0,2 = e^{-\lambda \cdot 40}$$

$$\lambda = \frac{\ln(5)}{40} = 0,04023\dots$$

c) $D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{0,955 \cdot I_0}\right) = 0,19\dots$

Die Dämpfung beträgt rund 0,2 dB.

$$20 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

$$I = I_0 \cdot 10^{-2}$$

Nach 1 km war noch 1 % der Anfangsintensität vorhanden.

$$D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$D_1 = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$$

Durch Herausheben von -1 erhält man:

$$D_1 = -10 \cdot (\lg(I_0) - \lg(I))$$

$$D_1 = -10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

$$\Rightarrow D_1 = -D$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B: für das richtige Anwenden der Methode *Trennen der Variablen* zur Ermittlung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung
1 × D: für den richtigen Nachweis zur speziellen Lösung der Differenzialgleichung
- b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln des Intensitätsverlusts
1 × C2: für das richtige Ablesen der maximalen Länge
1 × A: für das richtige Ermitteln des Parameters λ
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Dämpfung
1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
1 × D: für den richtigen Nachweis mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen