

Medikamentenherstellung

Aufgabennummer: B_368

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Ein Pharmaunternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 und daraus das Medikament E her.

Die Produktionsverflechtung ist im nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt (alle Angaben in ME).

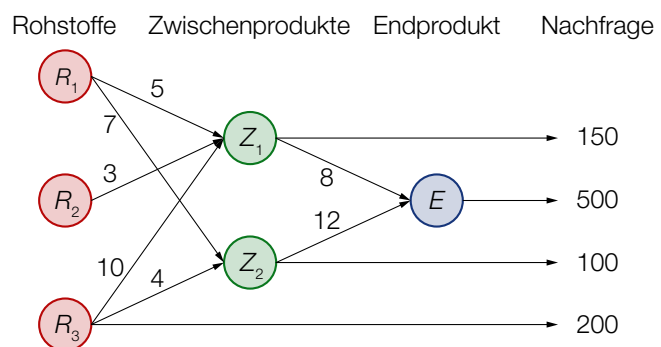


Abbildung 1

- a) – Lesen Sie aus dem Gozinto-Graphen ab, aus welchen Rohstoffmengen 1 ME des Zwischenprodukts Z_2 hergestellt wird.
- Geben Sie an, welche Rohstoffe und Zwischenprodukte direkt nachgefragt werden.
 - Beschreiben Sie, wie man mithilfe des Gozinto-Graphen die benötigten Rohstoffmengen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts berechnen kann.
 - Berechnen Sie den Rohstoffbedarf für 1 ME des Medikaments E .

- b) Die quadratische Matrix $\mathbf{A}$ beschreibt die Produktionsverflechtung zwischen Rohstoffen, den Zwischenprodukten und dem Medikament.

- Erstellen Sie die Matrix $\mathbf{A}$.

Der Vektor $\vec{n}$ beschreibt die in der obigen Abbildung dargestellte Nachfrage nach R_1 , R_2 , R_3 , Z_1 , Z_2 und E .

- Erstellen Sie den Vektor $\vec{n}$.

Der Vektor $\vec{x}$ beschreibt die benötigten Mengen an R_1 , R_2 , R_3 , Z_1 , Z_2 und E .

- Berechnen Sie den Vektor $\vec{x}$.

- c) Der Materialbestand im Lager beträgt 80 000 ME von R_1 , 20 000 ME von R_2 und 76 800 ME von R_3 .

Aus diesem Materialbestand sollen 600 ME des Medikaments E hergestellt und keine Rohstoffe oder Zwischenprodukte an den Markt direkt abgegeben werden.

Die Matrix $\mathbf{A}$ beschreibt den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte. Die Matrix $\mathbf{B}$ beschreibt den Mengenbedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung des Medikaments.

- Erstellen Sie die beiden Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.
- Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot 600$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.
- Berechnen Sie, wie viel von den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 im Lager übrig bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) 1 ME von Z_2 wird aus 7 ME R_1 und aus 4 ME R_3 hergestellt.

Der Rohstoff R_3 und die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 werden direkt nachgefragt.

Für die benötigte Menge von R_1 werden zunächst alle Pfade ausgewählt, die von R_1 zu E führen. Die Zahlen längs eines Pfades werden miteinander multipliziert. Die Produkte aller relevanten Pfade werden abschließend summiert. Für die anderen Rohstoffe wird dieser Vorgang wiederholt.

$$R_1: 5 \cdot 8 + 7 \cdot 12 = 124$$

$$R_2: 3 \cdot 8 = 24$$

$$R_3: 10 \cdot 8 + 4 \cdot 12 = 128$$

Für 1 ME von E werden 124 ME von R_1 , 24 ME von R_2 und 128 ME von R_3 benötigt.

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 150 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Der Rechenweg für $\vec{x}$ ohne Matrizen kann mithilfe der angegebenen Gleichung über das folgende lineare Gleichungssystem erfolgen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \cdot x_4 + 7 \cdot x_5 \\ x_2 &= 3 \cdot x_4 \\ x_3 &= 10 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 200 \\ x_4 &= 8 \cdot x_6 + 150 \\ x_5 &= 12 \cdot x_6 + 100 \\ x_6 &= 500 \end{aligned} \quad \text{Dabei gilt: } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz liefert den Vektor $\vec{x}$:

$$x_1 = 63\,450; x_2 = 12\,450; x_3 = 66\,100; x_4 = 4\,150; x_5 = 6\,100; x_6 = 500$$

Alternativer Rechenweg mit der inversen Matrix:

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 4 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vektor } \vec{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 63450 \\ 12450 \\ 66100 \\ 4150 \\ 6100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Es wird der Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung von 600 ME des Medikaments E berechnet.

$$\text{benötigte Rohstoffmengen: } \left[\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \right] \cdot 600 = \begin{pmatrix} 74400 \\ 14400 \\ 76800 \end{pmatrix}$$

Von R_1 und R_2 bleiben jeweils 5 600 ME übrig, R_3 wird zur Gänze verbraucht.

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 4
- b) 3
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —