

Höhenwachstum von Fichten*

Aufgabennummer: B_350

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Der Zusammenhang zwischen dem Alter und der durchschnittlichen Höhe von Fichten kann näherungsweise mithilfe einer Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = a \cdot e^{-\frac{b}{t}}$$

t ... Alter in Jahren

$h(t)$... durchschnittliche Höhe im Alter t in Metern (m)

$a > 0$... Parameter in m

$b > 0$... Parameter in Jahren

- a) – Begründen Sie mathematisch, warum $e^{-\frac{b}{t}}$ für $t = 0$ nicht definiert ist.
 – Begründen Sie mathematisch, warum die durchschnittliche Höhe in diesem Modell a nicht überschreiten kann.

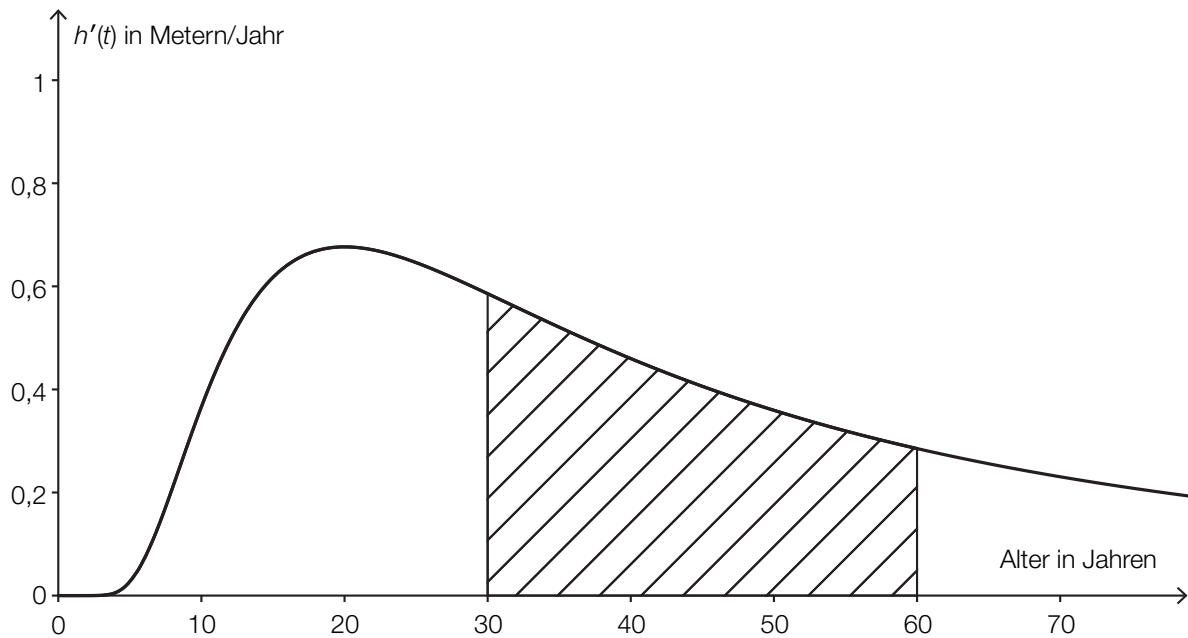
Für einen 80-jährigen Fichtenbestand beträgt die durchschnittliche Höhe der Fichten 19,24 m. Der Parameter a ist gleich 28 m.

- Berechnen Sie den Parameter b .
- Berechnen Sie anhand dieses Modells, um wie viel Prozent die durchschnittliche Höhe in den nächsten 20 Jahren zunehmen wird.

- b) Für einen Fichtenbestand gilt: $a = 60$ m, $b = 50$ Jahre.

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall $[10; 70]$.
- Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe eines Fichtenbestandes $h'(t)$ dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung des Inhalts der schraffierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Durch 0 kann nicht dividiert werden.

Für $b > 0$ und $t > 0$ ist $-\frac{b}{t}$ kleiner als 0 und daher $e^{-\frac{b}{t}}$ kleiner als 1. Daher gilt: $a \cdot e^{-\frac{b}{t}} < a$.

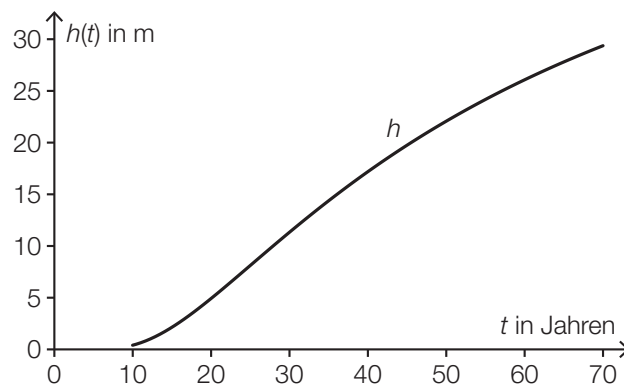
$$19,24 = 28 \cdot e^{-\frac{b}{80}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $b = 30,0\dots \approx 30$

$$\frac{h(100) - h(80)}{h(80)} = 0,0779\dots \approx 7,8 \%$$

Gemäß diesem Modell rechnet man in den nächsten 20 Jahren mit einer Zunahme der durchschnittlichen Höhe um rund 7,8 %.

b)



$$h'(t) = \frac{3000}{t^2} \cdot e^{-\frac{50}{t}}$$

$$h'(40) = 0,537\dots \approx 0,54$$

Die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten beträgt rund 0,54 m pro Jahr.

c) Der Inhalt der schraffierten Fläche entspricht der Zunahme der durchschnittlichen Höhe dieses Fichtenbestands zwischen $t = 30$ Jahre und $t = 60$ Jahre.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D1: für die richtige mathematische Begründung, warum die Funktion an der Stelle $t = 0$ nicht definiert ist
- 1 × D2: für die richtige mathematische Begründung, warum die durchschnittliche Höhe a nicht überschreiten kann
- 1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
- 1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

- b) 1 × B1: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im Intervall $[10; 70]$
- 1 × B2: für die richtige Berechnung der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe von 40-jährigen Fichten

- c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang