

Sportartikel*

Aufgabennummer: B_348

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Für einen Sportartikel lassen sich die Produktionskosten mithilfe der linearen Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 25 \cdot x + 300$$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kapazitätsgrenze liegt dabei bei 50 ME.

Das Produkt kann zu einem Preis von 40 GE/ME verkauft werden.

- Erklären Sie, warum der maximale Gewinn hier nicht mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden kann.
- Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

- b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3252,80 GE.

Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion.
- Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion.

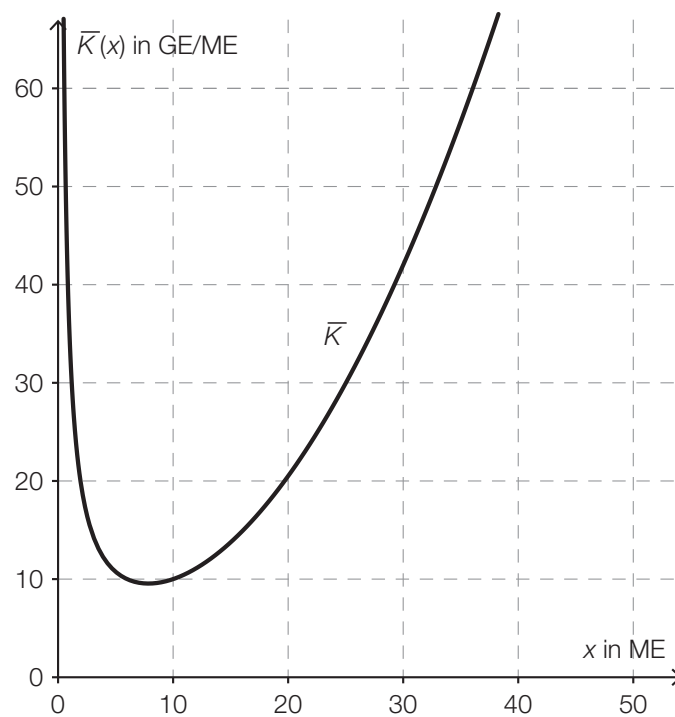
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$$K'(x) = 0,15 \cdot x^2 - 0,6 \cdot x + 5$$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

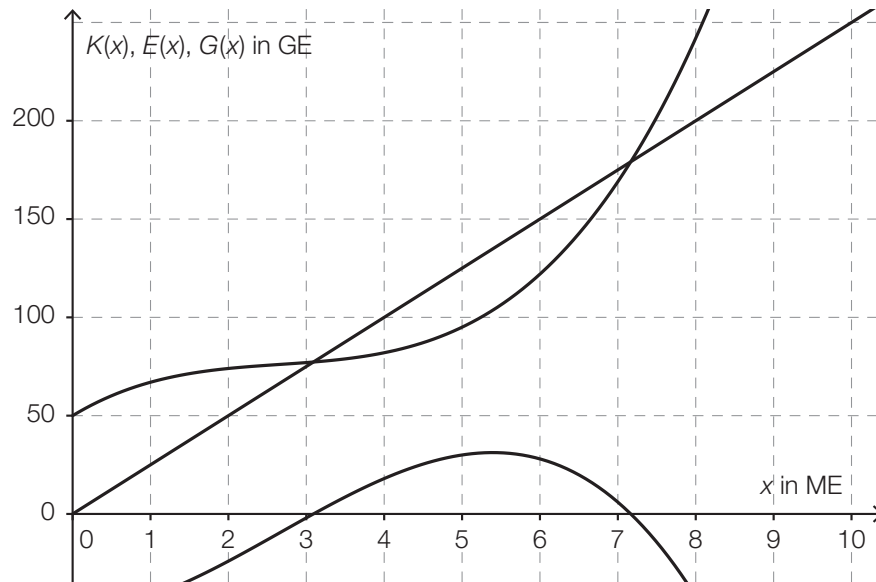
– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K .

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion $\bar{K}$ dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

- d) Die Graphen einer Kostenfunktion K , einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



- Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen.
- Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Die Gewinnfunktion ist im gegebenen Fall eine lineare Funktion mit positiver Steigung. Sie nimmt ihren maximalen Funktionswert am rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) an.

$$G(x) = 40 \cdot x - (25 \cdot x + 300)$$

$$G(50) = 450$$

Der maximale Gewinn beträgt 450 GE.

- b) I. $K(0) = 2900$
 II. $K''(5) = 0$
 III. $K(5) = 3100$
 IV. $K(9) = 3252,80$

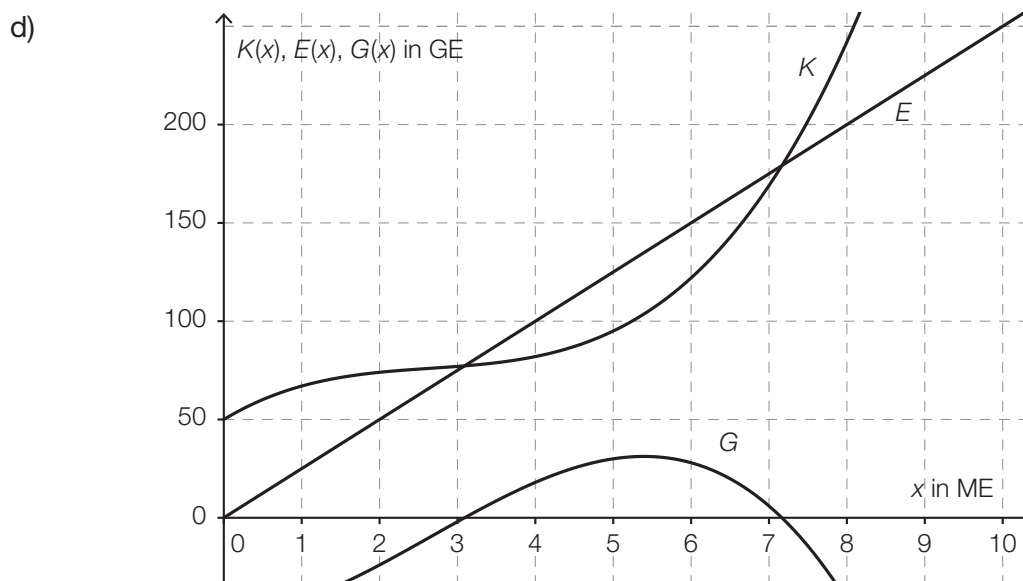
Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$$a = 0,2; b = -3; c = 50; d = 2900$$

- c) $K(x) = \int K'(x) dx = 0,05 \cdot x^3 - 0,3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
 $K(0) = 30 \Rightarrow C = 30$
 $K(x) = 0,05 \cdot x^3 - 0,3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 30$

Betriebsoptimum: rund 8 ME

Toleranzbereich: [7 ME; 9 ME]



$$E(x) = 25 \cdot x$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für die richtige Erklärung
(Auch eine Argumentation, dass die Gewinnfunktion keine lokalen Extremstellen hat, an denen die Tangentensteigung null ist, ist zulässig.)
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
- b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Information zur Kostenkehre
1 × A2: für das richtige Aufstellen der 3 Gleichungen mithilfe der Informationen zu den Kosten
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
- c) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [7 ME; 9 ME]
- d) 1 × C: für die richtige Beschriftung der 3 dargestellten Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion