

Vektorgrafiken*

Aufgabennummer: B_347

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Eine Vektorgrafik besteht im Gegensatz zur Pixelgrafik nicht aus einzelnen Bildpunkten (Pixeln), sondern wird durch geometrische Primitive (Linie, Kreis, Polygone, Splines ...) definiert.

a) Rechtecke können in einer Vektorgrafik durch Angabe der Eckpunkte als geschlossene Streckenzüge definiert werden.

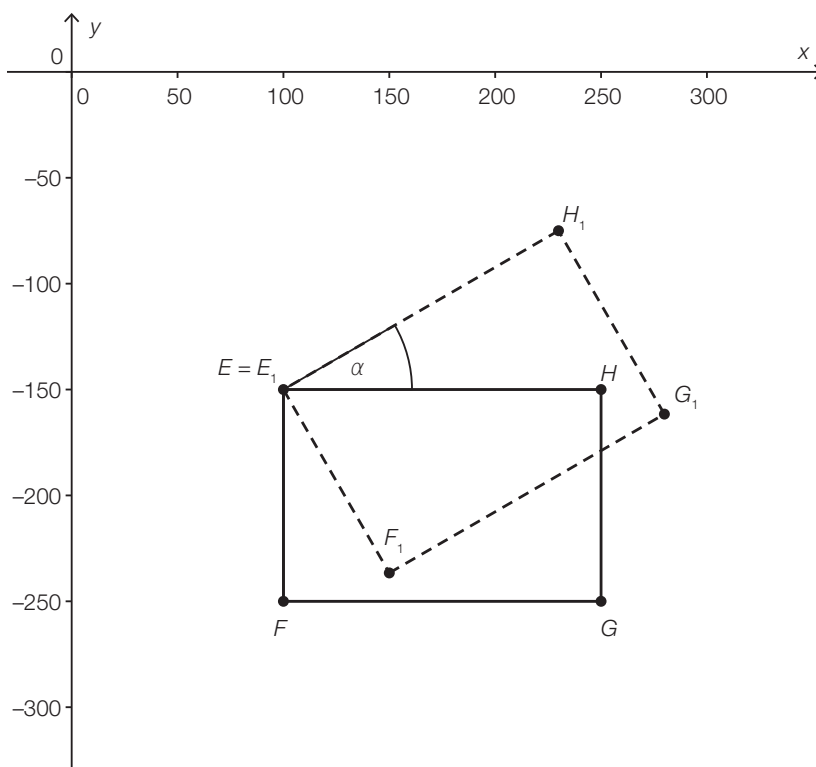
Es gibt zwei Rechtecke $ABCD$ mit:

- $A = (50|-100)$ und $B = (250|-250)$ sind zwei benachbarte Eckpunkte.
- Die Seite BC ist halb so lang wie die Seite AB .

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke.

b) Ein Vorteil von Vektorgrafiken ist, dass geometrische Transformationen sehr einfach und ohne Qualitätsverlust durchgeführt werden können.

Das in der nachstehenden Grafik dargestellte Rechteck $E_1F_1G_1H_1$ entstand aus dem Rechteck $EFGH$ durch Drehung um den Eckpunkt $E = (100|-150)$ gegen den Uhrzeigersinn.



– Zeigen Sie rechnerisch unter Verwendung der Punkte $E = (100|-150)$, $H = (250|-150)$ und $H_1 = (230|-75)$, dass der Drehwinkel gerundet 30° beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

d) Splines sind stückweise zusammengesetzte Funktionen, deren Graphen knickfrei ineinander übergehen. Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Ein kubischer Spline, der aus 2 Funktionen 3. Grades zusammengesetzt ist, ist für das Intervall $[0; 2]$ folgendermaßen definiert:

$$s_0(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{3} \cdot x \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

$$s_1(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 1 \quad \text{für } 1 \leq x \leq 2$$

– Zeigen Sie, dass der Übergang von s_0 auf s_1 knickfrei erfolgt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 200 \\ -150 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu $\vec{AB}$ mit halber Länge: $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 325 \\ -150 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C hat die Koordinaten (325|-150).

Auftragen des Normalvektors in die andere Richtung ist ebenfalls zulässig. Man erhält dann: $C = (175|-350)$.

b) $\vec{EH} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{EH}_1 = \begin{pmatrix} 130 \\ 75 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{EH} \cdot \vec{EH}_1}{|\vec{EH}| \cdot |\vec{EH}_1|} \Rightarrow \alpha = 29,98...^\circ \approx 30^\circ$$

c) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

d) $s_0(1) = s_1(1) = 1$

$$s_0'(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{5}{3} \Rightarrow s_0'(1) = -\frac{1}{3}$$

$$s_1'(x) = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + \frac{23}{3} \Rightarrow s_1'(1) = -\frac{1}{3}$$

Die beiden Funktionen haben also an der Stelle $x = 1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung, der Übergang ist also knickfrei.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermitteln des Normalvektors mit halber Länge)
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke
- b) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis
- c) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
- d) 1 × D: für den richtigen Nachweis (Funktionswert und Steigung)