

LED-Lampen (5)*

Aufgabennummer: B_346

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

- a) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden. In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen verschiedener Leistung der jeweilige Lichtstrom angegeben.

Leistung in Watt	3	4	5	6	9,5	11	17
Lichtstrom in Lumen	130	250	280	350	600	800	1 000

Der Lichtstrom soll in Abhängigkeit von der Leistung beschrieben werden.

- Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
- Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion, welcher Lichtstrom für eine 15-Watt-LED-Lampe zu erwarten ist.

- b) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit $\sigma = 75$ Lumen angenommen werden. Für 8 zufällig ausgewählte Lampen wurde jeweils der Lichtstrom (in Lumen) gemessen.

1 053	900	984	873	838	1 045	960	955
-------	-----	-----	-----	-----	-------	-----	-----

- Ermitteln Sie den 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ des Lichtstroms.
- Zeigen Sie anhand der entsprechenden Formel, warum für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekanntem σ gilt: Wird der Stichprobenumfang vervierfacht, so halbiert sich die Breite des $(1 - \alpha)$ -Vertrauensbereichs für den Erwartungswert μ .

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

- a) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(x) = 63,97 \cdot x - 20,06$$

x ... Leistung in Watt (W)

$f(x)$... Lichtstrom bei der Leistung x in Lumen (lm)

$$f(15) = 939,5... \approx 940$$

Gemäß diesem Modell ist für eine 15-Watt-LED-Lampe ein Lichtstrom von rund 940 lm zu erwarten.

- b) Zweiseitigen 95%-Vertrauensbereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Berechnung von $\bar{x}$ mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 951$ Lumen

$$\sigma = 75 \text{ Lumen}$$

$$n = 8$$

$$\alpha = 5 \%$$

$$u_{0,975} = 1,959...$$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in Lumen: $899 \leq \mu \leq 1003$.

Der Ausdruck $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bestimmt die Breite des Vertrauensbereichs.

Eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs n bedeutet für die Breite:

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der linearen Regressionsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung des Lichtstroms einer 15-Watt-LED-Lampe
- b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Vertrauensbereichs
1 × D: für den richtigen Nachweis