

Volumen eines Baumes*

Aufgabennummer: B_310

Technologieeinsatz:

möglich ☒

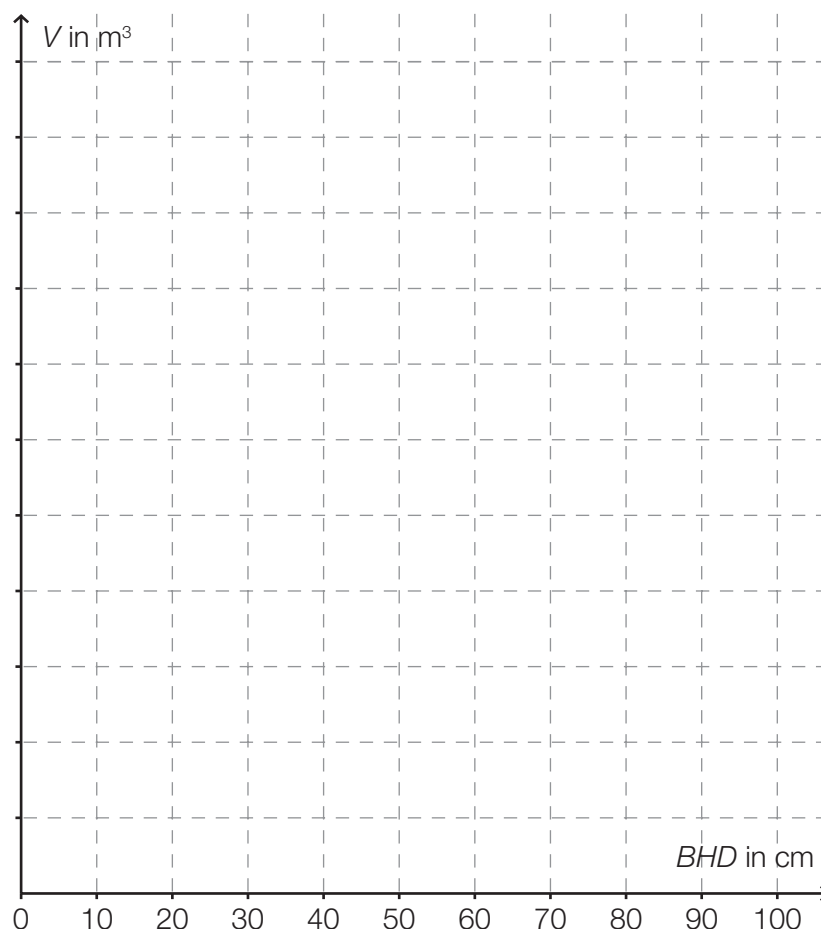
erforderlich ☐

Die Ermittlung des Volumens eines Baumstamms kann auf verschiedene Weisen erfolgen.

a) Näherungsweise kann das Volumen eines stehenden Baums folgendermaßen ermittelt werden:

„Man misst den Bruthöhendurchmesser in cm (= Durchmesser des Baums in 1,3 m Höhe), multipliziert diese Zahl mit sich selbst und teilt das Ergebnis durch 1 000. Die Maßzahl des Ergebnisses ist die Maßzahl des Volumens eines Baums in m^3 .“

- Übertragen Sie diesen Zusammenhang in eine Formel. Benutzen Sie dazu die Bezeichnungen *BHD* (Bruthöhendurchmesser) und *V* (Volumen).
- Stellen Sie das Volumen *V* eines Baums in Abhängigkeit von seinem Bruthöhendurchmesser *BHD* im Intervall $[0; 100]$ im unten stehenden Diagramm dar. Verwenden Sie eine geeignete Skalierung der senkrechten Achse.



* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Die *erweiterte Formel von Denzin* bietet eine Möglichkeit, das Volumen eines Baums näherungsweise zu berechnen. Als Formel angeschrieben lautet sie (für eine bestimmte Baumart):

$$V = \frac{BHD^2}{1000} \cdot \frac{3 \cdot h + 25}{100}$$

BHD ... Durchmesser in 1,3 Metern Höhe („Brusthöhendurchmesser“) in Zentimetern (cm)

h ... Höhe des Baums in Metern (m)

V ... Volumen des Baums in Kubikmetern (m³)

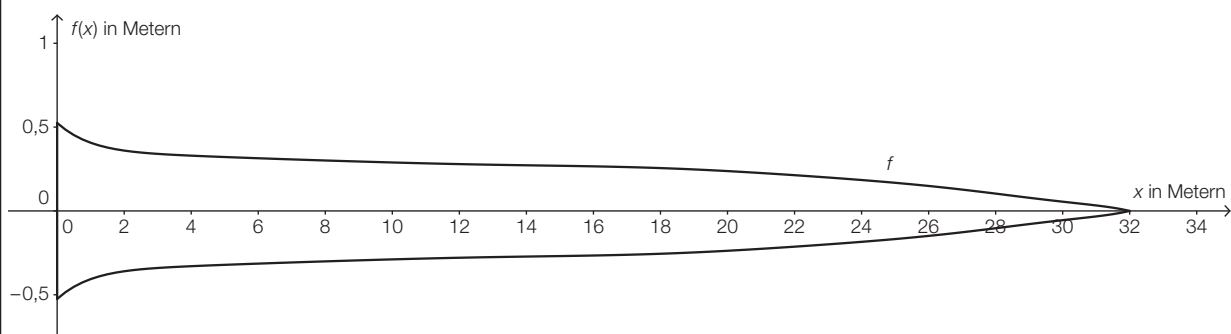
Ein 30 m hoher Baum hat einen Brusthöhendurchmesser von 50 cm. Für diesen Baum soll das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin ermittelt werden. Das tatsächliche Volumen dieses Baums beträgt 3,05 m³.

- Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin berechnet.

- c) Zur Berechnung seines Volumens kann ein Baumstamm näherungsweise als Kegel angesehen werden. Man geht in diesem Modell davon aus, dass das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser stets gleich bleibt. Das Modell für einen bestimmten Baumstamm ist ein Drehkegel mit einem Durchmesser von 22 cm und einer Höhe von 18 m. In einem bestimmten Jahr vergrößert sich der Durchmesser um 2 mm.

- Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Höhenwachstum des Baums in diesem Jahr.
- Zeigen Sie, dass eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers zu einer Verachtfachung des Volumens führt.

- d) Die Form eines gefällten Baumstamms kann näherungsweise durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x -Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



- Erstellen Sie eine Formel, mit der das Volumen V des Baumstamms berechnet werden kann.

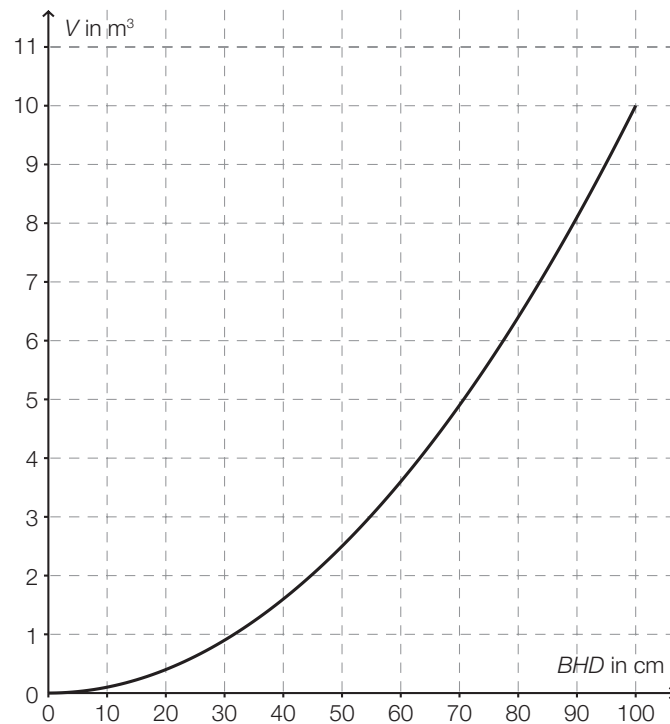
$V =$ _____

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $V = \frac{BHD^2}{1000}$



b) $V = \frac{50^2}{1000} \cdot \frac{3 \cdot 30 + 25}{100} = 2,875$

Betrag des relativen Fehlers: $\left| \frac{2,875 - 3,05}{3,05} \right| = 0,0573... \approx 5,7 \%$

c) $\frac{1800}{22} = \frac{x}{22,2} \Rightarrow x = 1816,36...$

$x - 1800 = 16,36... \approx 16,4$

Der Höhenzuwachs des Baums in diesem Jahr beträgt rund 16,4 cm.

Eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers bringt auch eine Verdoppelung der Höhe mit sich:

$$V_{\text{neu}} = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi \cdot 2h = \frac{1}{3} \cdot 4r^2 \cdot \pi \cdot 2h = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 8 \cdot V_{\text{alt}}$$

d) $V = \pi \cdot \int_0^{32} (f(x))^2 dx$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × A2: für die sinngemäß richtige Darstellung des Graphen (Parabel mit Tiefpunkt im Koordinatenursprung)
1 × A3: für eine geeignete Skalierung der vertikalen Achse
- b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Volumens mithilfe der erweiterten Formel von Denzin
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Betrags des relativen Fehlers
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Höhenwachstums in diesem Jahr
1 × D: für einen richtigen Nachweis
- d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel