

Länge eines Werkstücks

Aufgabennummer: B_309

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.

- a) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72,3$ mm und $\sigma = 0,5$ mm.
 Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen.

Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

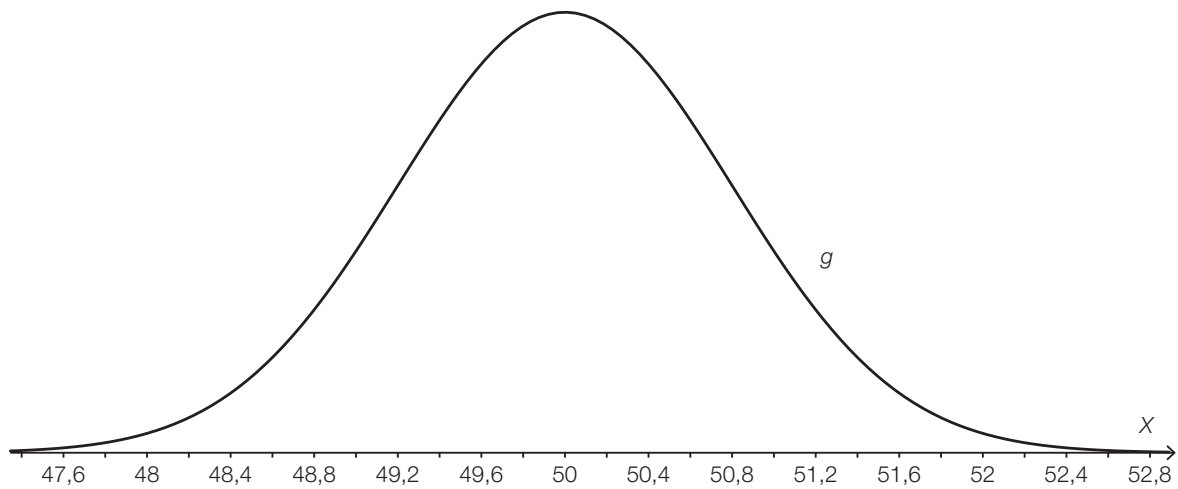
- Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\bar{X}$ an.
- Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstrebereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
- Beschreiben Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite dieses 95-%-Zufallsstrebereichs halbiert.
- Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\bar{X}$ für $n = 7$ größer ist als jenes für $n = 5$.

- b) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72,3$ mm.
 Werkstücke, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert.
 Abweichungen von bis zu $\pm 0,9$ mm vom Erwartungswert werden toleriert.

- Berechnen Sie für eine Standardabweichung von $\sigma = 0,5$ mm die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück aussortiert wird.
- Berechnen Sie, wie groß die Standardabweichung sein müsste, damit der Ausschussanteil 2 % beträgt.

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Zufallsvariablen X dargestellt.

- Begründen Sie mithilfe der Dichtefunktion, warum für die zugehörige Verteilungsfunktion G gilt: $G(\mu) = 0,5$.
- Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeit $1 - G(51)$ in der unten stehenden Abbildung.
- Lesen Sie aus dem Graphen der Dichtefunktion die Standardabweichung σ ab.



Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{x}} = 72,3 \text{ mm}$ und $\sigma_{\bar{x}} = \frac{0,5}{\sqrt{7}} \text{ mm}$.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\mu \pm u_{0,975} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

$$u_{0,975} = 1,959 \dots$$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [71,9; 72,7].

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmaler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

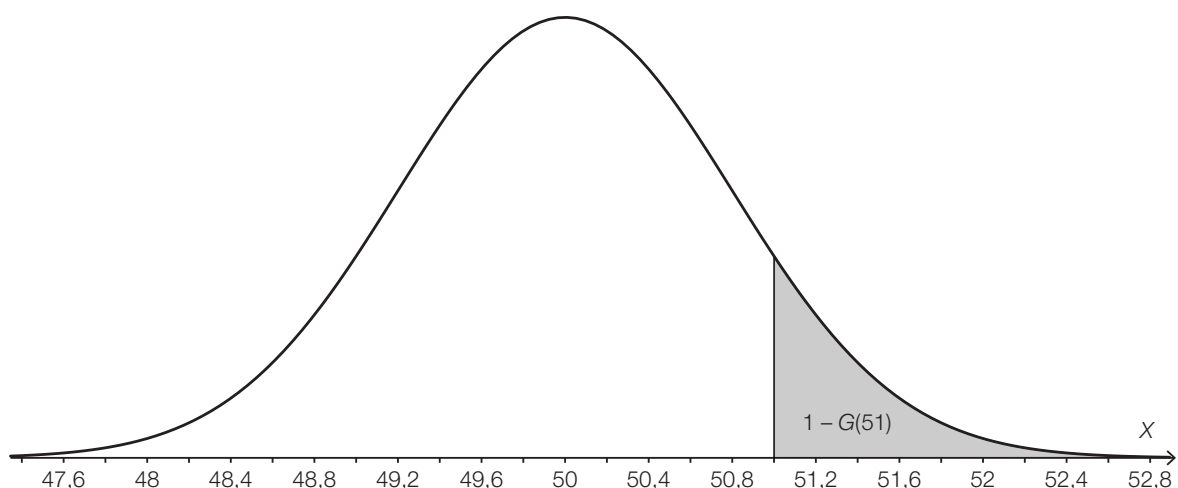
- b) $P(\text{„Werkstück wird aussortiert“}) = 1 - P(71,4 \leq X \leq 73,2) = 0,0718 \dots \approx 7,2 \%$

$$\sigma = \frac{x_{\text{ob}} - \mu}{u_{0,99}} = \frac{73,2 - 72,3}{2,326 \dots} = 0,38 \dots \approx 0,4$$

Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

- c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ .

$$\text{Daher gilt: } G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x) dx = 0,5.$$



$$\sigma = 0,8 \text{ mm}$$

Toleranzbereich: [0,6; 1,0]

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstrebereichs
1 × C: für eine richtige Beschreibung
1 × D: für eine richtige Begründung
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
- c) 1 × D: für eine richtige Begründung
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche
1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich [0,6; 1,0]