

Brettspiel

Aufgabennummer: B_288

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Bei einem Spiel gewinnt diejenige Person, die als erstes ein vorgegebenes Muster auf ihrem Spielbrett mit roten und grünen Farbsteinen ausgelegt hat.

Bei einem Spielzug wird zuerst mit 2 Zahlenwürfeln („normale“ Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 6) geworfen. Die aus den Augenzahlen gebildete Summe (Augensumme) bestimmt, wie viele Farbsteine man auf das Spielbrett legen darf.

Anschließend wird für jeden zu legenden Farbstein die Farbe gewürfelt. Dazu wird ein spezieller Farbwürfel mit 4 grünen und 2 roten Seiten verwendet.

Ein Spielzug besteht daher aus dem Werfen der 2 Zahlenwürfel und dem darauffolgenden mehrmaligen Werfen des Farbwürfels.

- a) Die Augensumme der beiden Zahlenwürfel kann als Zufallsvariable X betrachtet werden.
- Erstellen Sie eine Tabelle, in der man für alle möglichen Augensummen der beiden Würfel die jeweilige Wahrscheinlichkeit ablesen kann.
 - Interpretieren Sie den Ausdruck $\sum_{i=2}^{12} (i \cdot P(X = i)) = 7$ im gegebenen Sachzusammenhang.
- b) Ein Kind darf den Farbwürfel 3-mal werfen.
- Erstellen Sie ein Baumdiagramm, in dem die möglichen Farbabfolgen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dargestellt sind.
 - Dokumentieren Sie, wie man mithilfe des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass 3 rote Farbsteine auf das Spielbrett gelegt werden dürfen, bestimmen kann.
 - Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind bei 3-maligem Werfen des Farbwürfels 1 roten Stein und 2 grüne Steine auf das Spielbrett legen darf.

c) Ein Kind wirft in einem Spielzug 7-mal den Farbwürfel.

- Ordnen Sie den beiden gegebenen Ausdrücken jeweils das passende Ereignis aus A bis D zu. [2 zu 4]

$\sum_{k=0}^4 \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$		A	Es werden weniger als 5 grüne Steine gelegt.
		B	Es werden maximal 5 rote Steine gelegt.
$\sum_{k=0}^5 \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$		C	Es werden weniger als 5 rote Steine gelegt.
		D	Es werden maximal 5 grüne Steine gelegt.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind mindestens 4-mal die Farbe Grün würfelt.

d) Ein Kind steht kurz vor dem Gewinn des Spiels. Es benötigt im nächsten Spielzug zum Fertigstellen des Musters noch genau 2 rote Steine.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind nach dem Würfeln genau 2 Steine, die beide rot sind, zur Verfügung hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

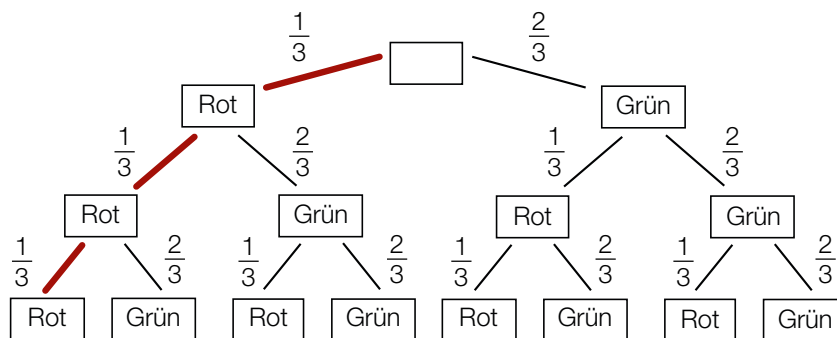
Möglicher Lösungsweg

a)

Augensumme x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mit dem Ausdruck wird der Erwartungswert der Zufallsvariablen X berechnet. Man kann erwarten, dass man bei oftmaliger Wiederholung des Spielzugs im Mittel 7 Farbsteine pro Runde auf das Spielbrett legen darf.

b)



Am Baumdiagramm wählt man den Ast, der nur aus roten Würfelergebnissen besteht (in der Abbildung mit Rot markiert). Entlang des Astes werden die Wahrscheinlichkeiten multipliziert.

$$P(\text{„1 Rot“ , „2 Grün“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{4}{9} = 0,\overline{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind bei 3 Würfeln 1-mal die Farbe Rot und 2-mal die Farbe Grün würfelt, beträgt rund 44,4 %.

c)

$\sum_{k=0}^4 \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$	$\mathcal{C}$
$\sum_{k=0}^5 \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$	$\mathcal{D}$

A	Es werden weniger als 5 grüne Steine gelegt.
B	Es werden maximal 5 rote Steine gelegt.
C	Es werden weniger als 5 rote Steine gelegt.
D	Es werden maximal 5 grüne Steine gelegt.

X ... Anzahl der Würfe, bei denen die Farbe Grün gewürfelt wird

Binomialverteilung mit $n = 7$ und $p = \frac{2}{3}$:

$$P(X \geq 4) = 0,8267... \approx 82,7 \%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 82,7 % wird bei 7 Würfeln mit dem Farbwürfel mindestens 4-mal die Farbe Grün geworfen.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind die Augensumme 2 und mit dem Farbwürfel 2-mal die Farbe Rot wirft, wird gebildet mit:

$$P(\text{„Augensumme} = 2\text{“}) \cdot P(\text{„der Farbwürfel zeigt bei beiden Würfeln Rot“})$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0,0030...$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 0,3 % hat das Kind genau 2 Steine, die beide rot sind.

Klassifikation

☐ Teil A☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 5 Stochastik
- b) 5 Stochastik
- c) 5 Stochastik
- d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) C Interpretieren und Dokumentieren
- b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 2
- d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —