

Fußballtore

Aufgabennummer: B_279

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Ein Betrieb produziert Fußballtore.

a) Die Preisfunktion der Nachfrage p_N ist bekannt:

$$p_N(x) = -40 \cdot x + 920 \text{ mit } 0 \leq x \leq 23$$

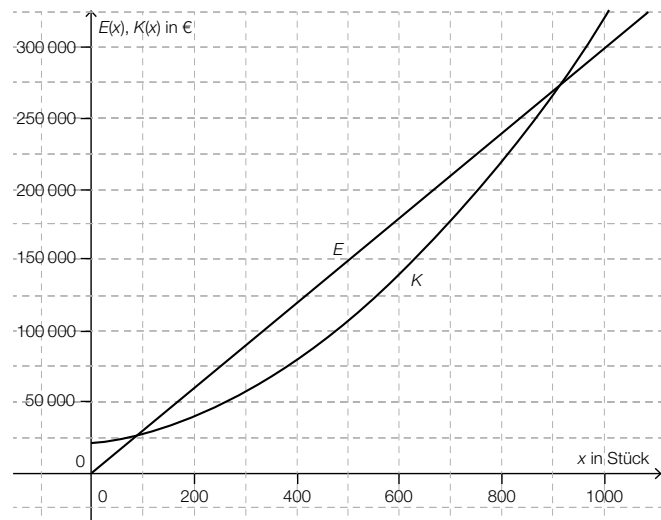
x ... nachgefragte Menge in ME

p_N ... Preis bei der Nachfrage x in GE/ME

- Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
- Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E für den angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem.
- Lesen Sie aus der Grafik diejenige Menge ab, bei der der maximale Erlös erzielt wird.

b) In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Gesamtkostenfunktion K und der Erlösfunktion E für Trainingstore dargestellt.

- Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Gewinnbereich.
- Lesen Sie aus der Abbildung die Werte für die Gewinnschwelle und die obere Gewinnngrenze ab.
- Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung jene Anzahl $x_{\max}$ ermittelt, für die der größte Gewinn erzielt wird, wenn die Funktionsgleichungen von E und K bekannt sind.



- c) Für die Fußballtore werden Netze produziert.
Die Fixkosten betragen € 3.000.
Bei der Produktion von 10 Netzen betragen die Stückkosten € 320 pro Netz.
Bei der Produktion von 100 Netzen betragen die Gesamtkosten € 5.450.
- Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Gesamtkostenfunktion ermittelt werden können.
 - Übertragen Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.
- d) Für nichtlineare Gesamtkostenfunktionen gilt: Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der Stückkostenfunktion an der Stelle des lokalen Stückkostenminimums.
- Zeigen Sie die Richtigkeit dieses Sachverhalts mithilfe der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.

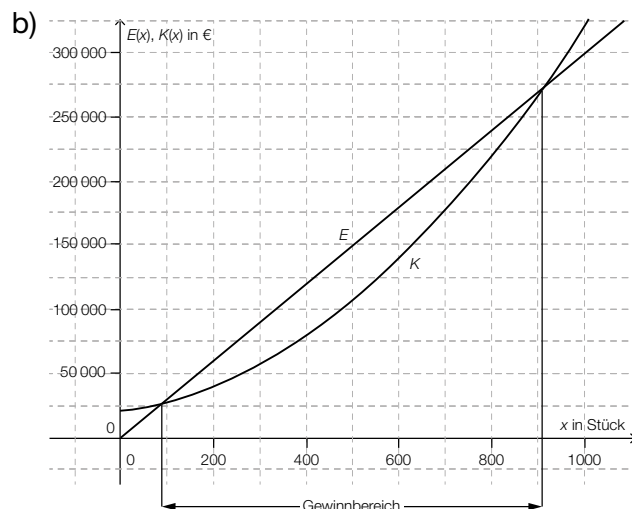
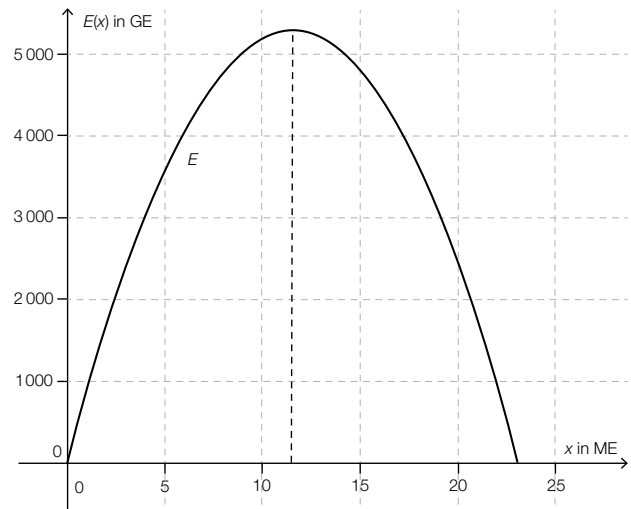
Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $E(x) = p_N(x) \cdot x$
 $E(x) = -40 \cdot x^2 + 920 \cdot x$

Der maximale Erlös wird
bei $x = 11,5$ ME erzielt.
(Ablesetoleranz: $\pm 0,5$ ME)



Gewinnschwelle bei $x \approx 90$ Stück
obere Gewinnngrenze bei $x \approx 910$ Stück
(Ablesetoleranz: ± 10 Stück)

Zuerst wird die Gewinnfunktion G
ermittelt: $G(x) = E(x) - K(x)$
Das Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$
liefert die Stückzahl $x_{\max}$, für die der maxi-
male Gewinn erzielt wird (Überprüfung
des Maximums mit $G''(x_{\max}) < 0$).

c) $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = a \cdot x + b + \frac{c}{x}$$

x ... Anzahl der produzierten Netze

$K(x)$... Gesamtkosten bei der Produktion von x Netzen in €

$\bar{K}(x)$... Stückkosten bei der Produktion von x Netzen in € pro Netz

I: $K(0) = 3000 \Rightarrow c = 3000$

II: $\bar{K}(10) = 320 \Rightarrow 10 \cdot a + b + 0,1 \cdot c = 320$

III: $K(100) = 5450 \Rightarrow 10000 \cdot a + 100 \cdot b + c = 5450$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0,1 \\ 10000 & 100 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 320 \\ 5450 \end{pmatrix}$$

- d) Das lokale Minimum der Stückkostenfunktion ermittelt man durch das Nullsetzen ihrer 1. Ableitung:

$$\left(\frac{K(x)}{x} \right)' = 0$$

Die Quotientenregel liefert:

$$\frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \text{ (Grenzkosten = Stückkosten)}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die x -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von Grenzkostenfunktion und Stückkostenfunktion.

Klassifikation

☐ Teil A☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 2 Algebra und Geometrie
- d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) 4 Analysis
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) C Interpretieren und Dokumentieren
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
- b) —
- c) —
- d) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) mittel
- d) schwer

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 3
- c) 3
- d) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —