

Gebäudetechnik*

Aufgabennummer: B_260

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Im Bereich der Gebäudetechnik spielen Temperatur, Schalldämmung und CO₂-Gehalt der Luft eine wichtige Rolle.

- a) Die mittlere Tagestemperatur in Bregenz soll für einen bestimmten Zeitraum durch eine Polynomfunktion 3. Grades T angenähert werden:

$$T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

t ... Zeit in Tagen

$T(t)$... mittlere Tagestemperatur zur Zeit t in °C

Es wurden folgende Daten ermittelt:

Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) lag die mittlere Tagestemperatur bei -5 °C.

Zur Zeit $t = 98$ Tage betrug sie $+8$ °C; zu dieser Zeit lag auch der Wendepunkt des Temperaturverlaufs vor.

Zur Zeit $t = 210$ Tage erreichte die mittlere Tagestemperatur $+20$ °C.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion.
- b) Um das Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} einer Wand aus Ziegelmauer und Fenster in Dezibel (dB) zu berechnen, wird in der Gebäudetechnik die nachstehende Formel verwendet.

$$R_{\text{Ges}} = -10 \cdot \lg \left(f_{\text{F}} \cdot 10^{-\frac{R_{\text{F}}}{10}} + f_{\text{Z}} \cdot 10^{-\frac{R_{\text{Z}}}{10}} \right)$$

f_{F} ... relativer Flächenanteil des Fensters an der gesamten Wandfläche

f_{Z} ... relativer Flächenanteil der Ziegelmauer an der gesamten Wandfläche

$R_{\text{F}}, R_{\text{Z}}$... Schalldämmmaß des Fensters bzw. der Ziegelmauer in dB

R_{Ges} ... Gesamtschalldämmmaß der Wand in dB

Ein Bauunternehmen plant, aus einer 50 m^2 großen Wand eine Fensterfläche herauszubrechen. Dabei hat das Fenster ein Schalldämmmaß von $R_{\text{F}} = 43 \text{ dB}$, die Ziegelmauer ein Schalldämmmaß von $R_{\text{Z}} = 65 \text{ dB}$.

Es wird ein Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} von mindestens 55 dB für diese Wand gefordert.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_{F} , den die Fensterfläche in dieser Wand maximal erreichen darf.
- 2) Berechnen Sie diese Fensterfläche in m^2 .

- c) In einem Schlafzimmer mit einem Luftvolumen von 45 m^3 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Lüftungsanlage eingeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt beträgt der CO_2 -Gehalt der Luft im Zimmer $0,2 \text{ Vol.-%}$, d. h., das CO_2 -Volumen beträgt $0,2 \%$ des gesamten Luftvolumens.

Die nachstehende Differenzialgleichung beschreibt das CO_2 -Volumen V (in m^3) im Schlafzimmer in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) ab dem Einschalten der Lüftung:

$$\frac{dV}{dt} = 0,006 - \frac{V}{3}$$

- 1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.
- 2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit der ursprüngliche CO_2 -Gehalt halbiert ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$
 $T''(t) = 6 \cdot a \cdot t + 2 \cdot b$

$$T(0) = -5$$

$$T(98) = 8$$

$$T(210) = 20$$

$$T''(98) = 0$$

oder:

$$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -5$$

$$a \cdot 98^3 + b \cdot 98^2 + c \cdot 98 + d = 8$$

$$a \cdot 210^3 + b \cdot 210^2 + c \cdot 210 + d = 20$$

$$6 \cdot a \cdot 98 + 2 \cdot b = 0$$

b1) $55 = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{43}{10}} + (1 - f_F) \cdot 10^{-\frac{65}{10}}\right)$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$f_F = 0,0571...$$

$$\text{maximale Fensterfläche: } 0,0571... \cdot 50 = 2,857...$$

Die maximale Fensterfläche, die das geforderte minimale Gesamtschalldämmmaß erfüllt, beträgt rund 2,86 m².

c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$V(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0,018$$

t ... Zeit in min

$V(t)$... CO₂-Volumen zur Zeit t in m³

oder:

allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0$:

$$V_h(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}}$$

Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0,006:$$

$$V_p(t) = a$$

$$0 + \frac{a}{3} = 0,006 \Rightarrow a = 0,018$$

$$V(t) = V_h(t) + V_p(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0,018$$

Auch eine Berechnung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mit einem anderen Ansatz (z. B. mit der Methode Trennen der Variablen) ist als richtig zu werten.

c2) $V(0) = 0,002 \cdot 45 = 0,09$

$$0,09 = C \cdot e^{-\frac{0}{3}} + 0,018 \Rightarrow C = 0,072$$

$$\frac{1}{2} \cdot V(0) = 0,045 = 0,072 \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0,018$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 2,94 \dots$

Nach etwa 2,9 min ist der ursprüngliche CO₂-Gehalt halbiert.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der gegebenen Temperaturen
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 2. Ableitung
- b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_F
1 × B: für die richtige Berechnung der maximalen Fensterfläche in m²
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung
1 × B2: für das richtige Ermitteln derjenigen Zeit, nach der der ursprüngliche CO₂-Gehalt halbiert ist