

E-Reader*

Aufgabennummer: B_224

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

- a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

- Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
- Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

- b) Betrachtet man nur die ersten 3 Zahlenpaare, so zeigt sich ein annähernd exponentieller Verlauf. Dieser kann durch

$$V_1(t) = 93,7 \cdot 1,94^t$$

oder durch

$$V_2(t) = 93,7 \cdot e^{0,662688 \cdot t}$$

dargestellt werden.

t ... Zeit in Wochen

$V_1(t)$, $V_2(t)$... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

- Erklären Sie, warum beide Funktionen V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben.
- Berechnen Sie die Verdoppelungszeit in diesem exponentiellen Wachstumsmodell.

- c) Betrachtet man alle 12 Zahlenpaare, so lässt sich die Entwicklung der Anzahl der insgesamt verkauften E-Reader näherungsweise durch eine logistische Funktion V beschreiben:

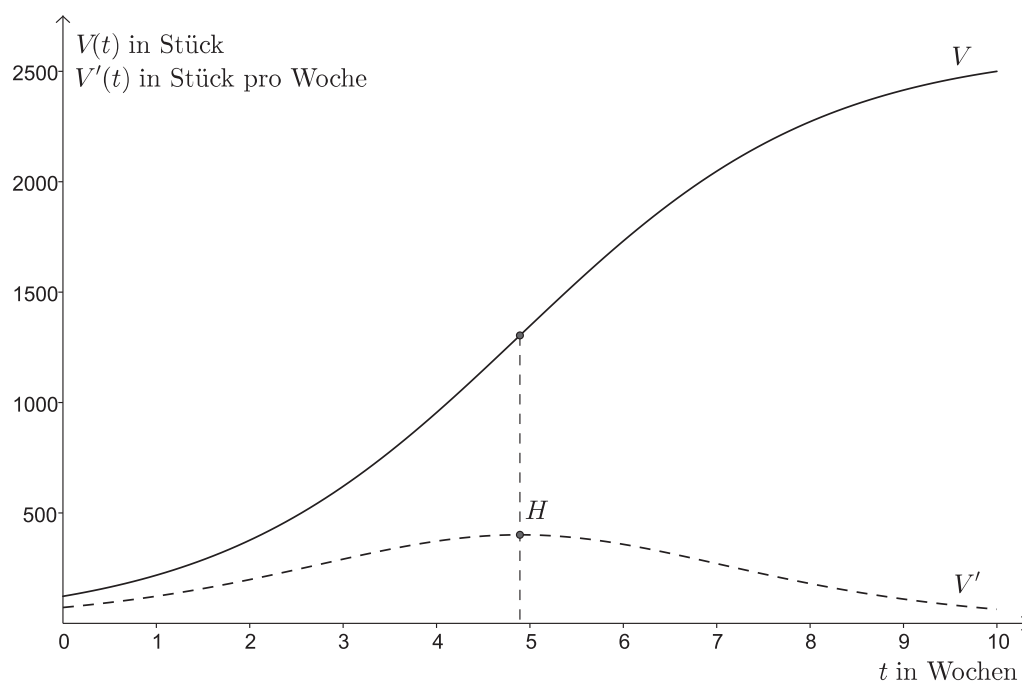
$$V(t) = \frac{2608}{1 + 20,28 \cdot e^{-0,6151 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen

$V(t)$... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

- Begründen Sie anhand der gegebenen Funktion, warum die Funktionswerte sich mit wachsendem t dem maximalen Wert 2 608 annähern.
- Berechnen Sie, um wie viel der logistische Funktionswert $V(8)$ vom gegebenen Tabellenwert bei 8 Wochen abweicht.

In der nachstehenden Grafik sind die logistische Funktion V sowie deren Ableitungsfunktion V' grafisch dargestellt.



- Interpretieren Sie die Bedeutung der Koordinaten des Hochpunktes H der Ableitungsfunktion V' im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Ermitteln der Regressionsgerade mittels Technologieeinsatz:

$$V(t) = 348,1 \cdot t - 396,5$$

t ... Zeit in Wochen

$V(t)$... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

- b) Da $1,94 \approx e^{0,662688}$, beschreiben V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf.

$$\text{Verdoppelungszeit: } T = \frac{\ln(2)}{\ln(1,94)} = 1,045\dots$$

Die Verdoppelungszeit beträgt rund 1,05 Wochen.

- c) Da für großes t der Wert $e^{-0,6151 \cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.

Funktionswert nach 8 Wochen: $V(8) \approx 2272$

Abweichung vom gegebenen Tabellenwert: $2280 - 2272 = 8$

Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

Die 1. Koordinate von H ist nach diesem Modell derjenige Zeitpunkt, in dessen Nähe am meisten E-Reader pro Woche verkauft wurden. Die 2. Koordinate entspricht in etwa der Anzahl der verkauften E-Reader in dieser Woche.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang
- b) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit mithilfe der Funktion V_1 oder V_2
- c) 1 × D: für die richtige Begründung, warum sich die Funktionswerte mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern
1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung
1 × C: für die richtige Interpretation der Koordinaten des Hochpunktes im Sachzusammenhang