

Sparbuch*

Aufgabennummer: B_222

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von € 200 abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch € 1.500 auf dem Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.
- Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KEST).
- b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von € 10.000 und 5 Jahre später einmalig ein Betrag x einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von € 20.000 zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.
- Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.
 - Berechnen Sie die Höhe des Betrags x ohne Berücksichtigung der KEST.
 - Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrags x verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.
- c) Auf einem Sparbuch stehen zu Jahresbeginn € 25.000 zur Verfügung. In den folgenden 12 Jahren sollen jeweils am Jahresende € 2.300 abgehoben werden können, sodass das Guthaben zur Gänze aufgebraucht ist.
- Berechnen Sie den entsprechenden Jahreszinssatz (ohne Berücksichtigung der KEST).

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

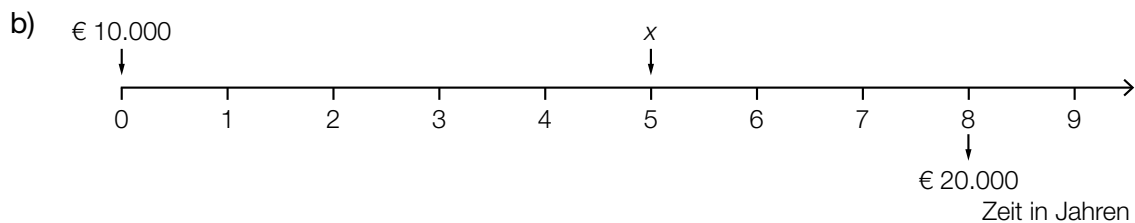
a) $q_{12} = \sqrt[12]{1,015} = 1,00124\dots$

Barwert der Ratenzahlung: $200 \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} = 22\,284,999\dots$

Barwert des Restbetrags: $\frac{1\,500}{1,015^{10}} = 1\,292,500\dots$

$22\,284,999\dots + 1\,292,500\dots = 23\,577,500\dots$

Es müssen zu Beginn € 23.577,50 auf das Sparbuch einbezahlt werden.



$$10\,000 \cdot 1,015^8 + x \cdot 1,015^3 = 20\,000$$

$$x = 8\,353,499\dots$$

Es muss ein Betrag in Höhe von € 8.353,50 nach 5 Jahren einbezahlt werden.

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden. Um diesen Betrag sinkt die Höhe von x bei früherer Einzahlung.

c) $25\,000 = 2\,300 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{12}}$
 $q = 1,01555\dots$

Der jährliche Zinssatz beträgt rund 1,56 %.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das Erkennen des richtigen finanzmathematischen Modells (Barwert)
 1 × B1: für die Verwendung des richtigen (monatlichen) Zinssatzes
 1 × B2: für die richtige Berechnung des am Beginn einzuzahlenden Betrags

- b) 1 × A: für die richtige Erstellung der Zeitlinie
 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe des Betrags x
 1 × D: für die richtige Begründung

- c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des jährlichen Zinssatzes
 1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes