

Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

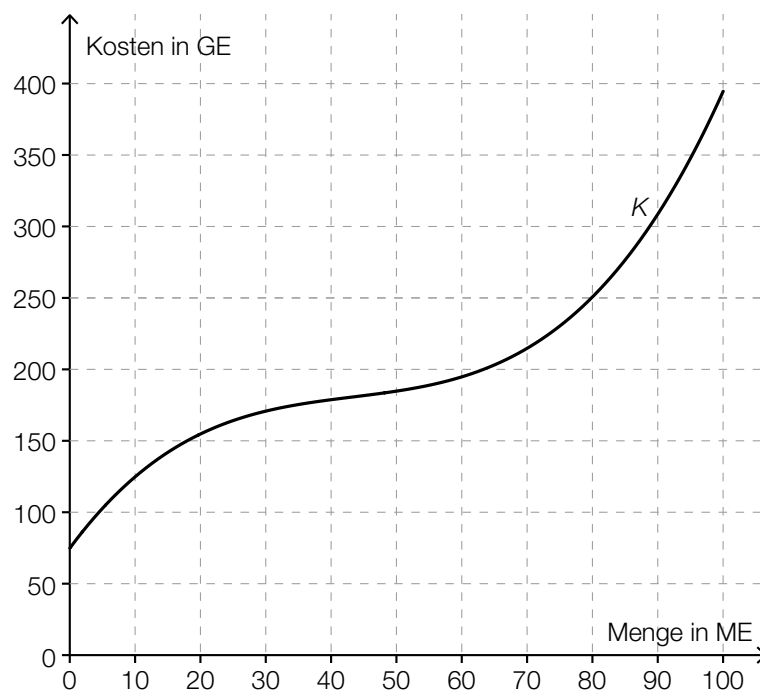
Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0,001 \cdot x^3 - 0,13 \cdot x^2 + 6,2 \cdot x + 75 \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)

$K(x)$... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

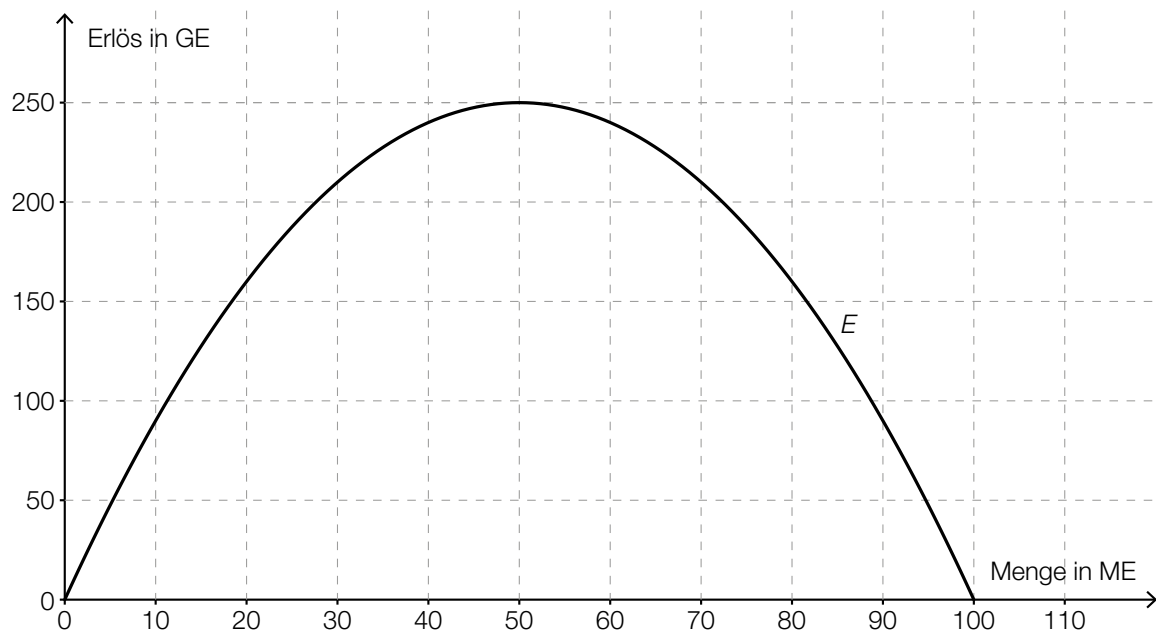
a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

- b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
- Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.
- c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



- Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
- Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
- Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

- a) Im Intervall $[0; 43]$ ist der Kostenverlauf degressiv.

Toleranzbereich der oberen Grenze: $[40; 50]$

$$\text{b) } \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,001 \cdot x^2 - 0,13 \cdot x + 6,2 + \frac{75}{x}$$

$$\bar{K}'(x) = 0,002 \cdot x - 0,13 - \frac{75}{x^2}$$

$$\bar{K}'(x_{\text{opt}}) = 0$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{\text{opt}} = 72,19...$

Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$$\bar{K}(x_{\text{opt}}) = K'(x_{\text{opt}})$$

minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\bar{K}(72,2) = 3,06...$

Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72,2) = 3,06...$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

- c) Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$$

$$E(100) = 0$$

$$E(50) = 250$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$E(x) = -0,1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$$

$$G(x) = E(x) - K(x) = -0,1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0,001 \cdot x^3 - 0,13 \cdot x^2 + 6,2 \cdot x + 75)$$

$$G(x) = -0,001 \cdot x^3 + 0,03 \cdot x^2 + 3,8 \cdot x - 75$$

$$G(x) = 50$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$x_1 = 34,17..., x_2 = 58,42...$$

Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für das richtige Ablesen des gesamten Bereichs, in dem der Kostenverlauf degressiv ist
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Produktionsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind
1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.
- c) 1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung