

## Champagner\*

Aufgabennummer: B\_215

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Champagner wird im französischen Weinbaugebiet *Champagne* nach streng festgelegten Regeln erzeugt.

- a) Eine Flasche Champagner wird zur Zeit  $t = 0$  in einen Kühlschrank mit einer Temperatur von  $\vartheta_U = 4^\circ\text{C}$  gelegt. Zu Beginn ( $t = 0$ ) beträgt die Temperatur des Champagners  $16^\circ\text{C}$  und nach 2 Stunden beträgt sie  $10^\circ\text{C}$ .

Die Temperatur des Champagners in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion  $\vartheta$  beschrieben:

$t$  ... Zeit in h

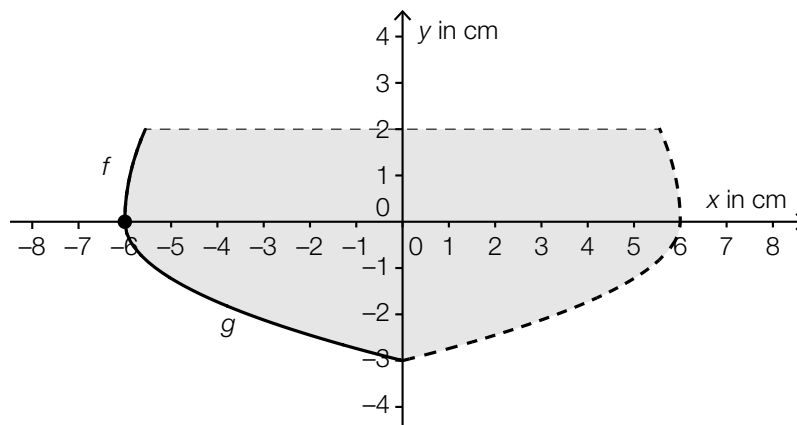
$\vartheta(t)$  ... Temperatur des Champagners zur Zeit  $t$  in  $^\circ\text{C}$

Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Champagners ist dabei direkt proportional zur jeweiligen Temperaturdifferenz  $\vartheta - \vartheta_U$ .

- 1) Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Temperaturfunktion  $\vartheta$  des Champagners auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit  $k$ .
- 2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess.

\* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion  $f$  und des Graphen der Wurzelfunktion  $g$  um die  $y$ -Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für  $f$  gilt:  $y = 3 \cdot \sqrt{x + a}$

Für  $g$  gilt:  $y = -\sqrt{1,5 \cdot x + 9}$

- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für  $a$  ab.
- 2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases.

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

- 3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe.

- c) Ein Händler verkauft die Sorten *Tradition*, *Rosé* und *Réserve* an 3 verschiedene Kunden in folgenden Mengen:

- Sorte *Tradition*:  
120 Flaschen an Kunde A, 12 Flaschen an Kunde B, 600 Flaschen an Kunde C
- Sorte *Rosé*:  
84 Flaschen an Kunde A, 60 Flaschen an Kunde B, 420 Flaschen an Kunde C
- Sorte *Réserve*:  
36 Flaschen an Kunde A, 72 Flaschen an Kunde B, 144 Flaschen an Kunde C

Kunde A bezahlt insgesamt € 9.864, Kunde B € 7.344 und Kunde C € 47.196.

- 1) Stellen Sie ein Gleichungssystem in Matrizenform auf, mit dem man für jede Sorte den Preis pro Flasche berechnen kann.

## Möglicher Lösungsweg

a1)  $\frac{dg}{dt} = k \cdot (g - 4)$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$g(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$$

oder:

$$\int \frac{g'}{g-4} dt = \int k dt$$

$$\ln|g(t) - 4| = k \cdot t + C_1$$

$$g(t) - 4 = C \cdot e^{k \cdot t}$$

$$g(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$$

$$g(0) = 16 \quad \text{oder} \quad C \cdot e^{k \cdot 0} + 4 = 16$$

$$C = 12$$

$$g(2) = 10 \quad \text{oder} \quad 12 \cdot e^{k \cdot 2} + 4 = 10$$

$$k = \frac{\ln(0,5)}{2} = -0,34657... \approx -0,3466$$

$$g(t) = 12 \cdot e^{-0,3466 \cdot t} + 4$$

b1)  $a = 6$

b2)  $V_y = \pi \cdot \left( \int_0^2 \left( \frac{y^2}{9} - 6 \right)^2 dy + \int_{-3}^0 \left( \frac{y^2 - 9}{1,5} \right)^2 dy \right) = 396,2...$

Das Füllvolumen beträgt rund 396 ml.

b3)  $\pi \cdot \int_{-3}^h \left( \frac{y^2 - 9}{1,5} \right)^2 dy = 150$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$h = -0,275...$$

$$3 - 0,275... = 2,724...$$

Die Füllhöhe beträgt rund 2,72 cm.

*Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn nur der Wert für h richtig ermittelt wurde.*

c1)  $x$  ... Preis für eine Flasche der Sorte *Tradition*

$y$  ... Preis für eine Flasche der Sorte *Rosé*

$z$  ... Preis für eine Flasche der Sorte *Réserve*

$$\begin{pmatrix} 120 & 84 & 36 \\ 12 & 60 & 72 \\ 600 & 420 & 144 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9864 \\ 7344 \\ 47196 \end{pmatrix}$$

## Lösungsschlüssel

- a1) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
- a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (allgemeine Lösung der Differenzialgleichung)  
1 × B: für die richtige Berechnung der Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess
- b1) 1 × C: für das richtige Ablesen von  $a$
- b2) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Füllvolumens
- b3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Füllhöhe
- c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems in Matrizenform