

Kosten und Gewinn

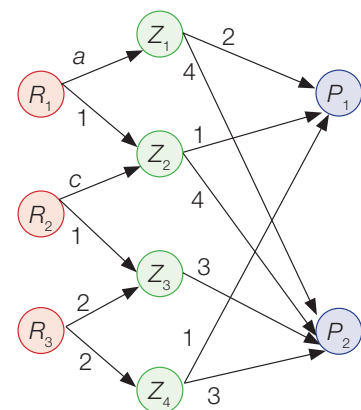
Aufgabennummer: B_164

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 , Z_3 und Z_4 und aus diesen die Endprodukte P_1 und P_2 her.
 Die Materialverflechtung in ME wird durch den nebenstehenden Gozinto-Graphen dargestellt.



- a) Für bestimmte Werte von a und c beschreibt die folgende Matrix den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

- Lesen Sie aus der Matrix ab, welche Mengen an Rohstoffen für die Herstellung von 1 ME des Endprodukts P_1 verwendet werden.
- Erstellen Sie die Matrix **A**, die den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Zwischenprodukte beschreibt.
- Berechnen Sie a und c .

- b) Für $a = 2$ und $c = 1$ beschreibt die folgende Matrix den Mengenbedarf an Rohstoffen für die Herstellung der Endprodukte:

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ beschreibt die Nachfrage nach den Endprodukten.

Der Materialbestand im Lager beträgt 1 460 ME von R_1 , 660 ME von R_2 und 1 160 ME von R_3 .

- Erstellen Sie eine Matrix-Gleichung zur Berechnung derjenigen erfüllbaren Nachfrage, bei der der gesamte Materialbestand verbraucht wird.
- Berechnen Sie diese Nachfrage.

c) Die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E für das Endprodukt P_2 sind bekannt:

$$K(x) = 2,5 \cdot x^2 + 59 \cdot x + 80$$

$$E(x) = -6 \cdot x^2 + 187 \cdot x$$

x ... produzierte und abgesetzte Menge in ME

$K(x)$, $E(x)$... Kosten bzw. Erlös bei der Menge x in GE

Bei einer bestimmten Menge $x_{\max}$ wird der maximale Gewinn erzielt.

- Berechnen Sie $x_{\max}$.
- Dokumentieren Sie in Worten, wie man den Preis des Endprodukts beim Verkauf der Menge $x_{\max}$ erhalten kann.
- Ermitteln Sie mithilfe des obigen Gozinto-Graphen, wie viel Mengeneinheiten von den Zwischenprodukten für die Herstellung der Menge $x_{\max}$ des Endprodukts P_2 benötigt werden.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Von den Rohstoffen benötigt man für P_1 5 ME von R_1 , 3 ME von R_2 und 2 ME von R_3 .

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 1 & 4 \cdot a + 4 \\ c & 4 \cdot c + 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt: } \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 1 & 4 \cdot a + 4 \\ c & 4 \cdot c + 3 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 15 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$a = 2; c = 3$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 7 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 660 \\ 1160 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot n_1 + 12 \cdot n_2 = 1460$$

$$\underline{n_1 + 7 \cdot n_2 = 660}$$

$$n_1 = 100; n_2 = 80$$

Es können höchstens 100 ME von P_1 und höchstens 80 ME von P_2 hergestellt werden.

$$\text{c) } G(x) = E(x) - K(x) = 128 \cdot x - 8,5 \cdot x^2 - 80$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow 128 - 17 \cdot x = 0 \Rightarrow x_{\max} = 7,529...$$

Bei einer Menge von rund 7,53 ME wird der maximale Gewinn erzielt.

Man berechnet den Funktionswert von E an der Stelle $x_{\max}$. Das Ergebnis dividiert man durch $x_{\max}$.

Man benötigt jeweils die 4-fache Menge (also rund 30,12 ME) von Z_1 und Z_2 sowie die 3-fache Menge (also rund 22,59 ME) von Z_3 und Z_4 .

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —

wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) mittel
- c) mittel

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 2
- c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —