

Magneten

Ein Unternehmen stellt Dauermagneten für verschiedene technische Anwendungen her.
Ein bestimmter Magnet wird nach dem Erhitzen abgekühlt.

a) Der Abkühlungsprozess *A* verläuft dabei modellhaft nach folgender Differenzialgleichung:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_U - T)$$

t ... Zeit in Minuten (min)

$T(t)$... Temperatur des Magneten zur Zeit t in °C

T_U ... Umgebungstemperatur in °C

k ... Proportionalitätsfaktor

- 1) Erklären Sie, warum der Proportionalitätsfaktor k für diesen Abkühlungsprozess positiv sein muss.
- 2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch *Trennen der Variablen*.

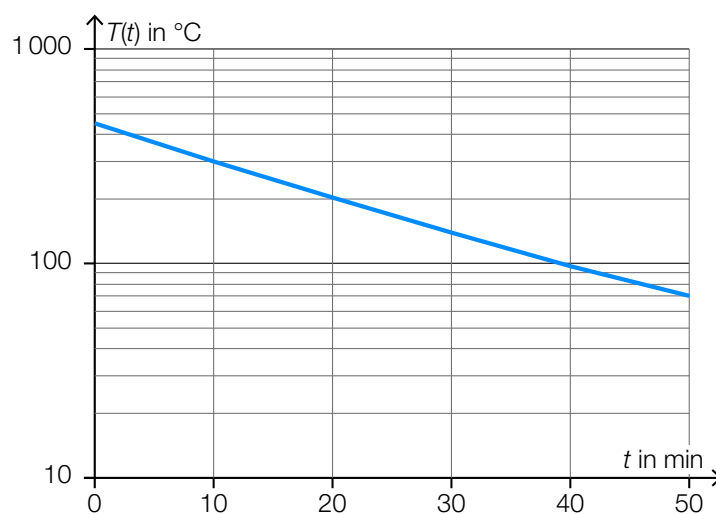
Es gilt: $T_U = 30$ °C

Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Magneten 440 °C.

- 3) Ermitteln Sie den Wert der Integrationskonstante.

b) Der Abkühlungsprozess *B* lässt sich modellhaft durch die Funktion T beschreiben:

$$T(t) = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot t}$$



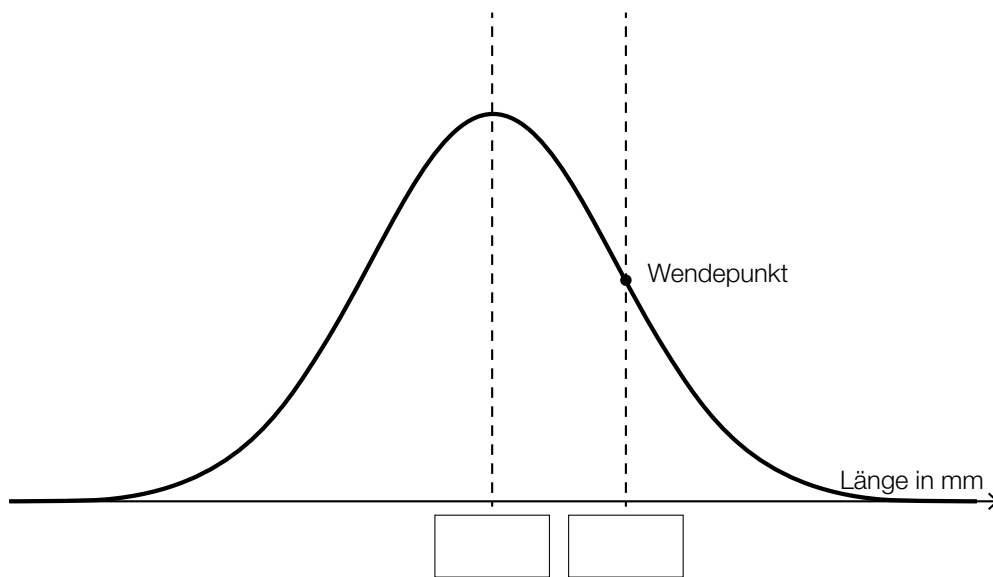
- 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung des Funktionsgraphen von T die Temperatur zur Zeit $t = 10$ min ab.
- 2) Berechnen Sie k mithilfe des abgelesenen Werts.

- c) Die erforderliche Länge (= Sollwert) der Magneten für den Einbau in elektronische Geräte ist 2,5 mm.

Messungen haben ergeben, dass die Länge des Magneten näherungsweise normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $\mu = 2,5$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0,05$ mm.

X ... Länge des Magneten in mm

- 1) Tragen Sie in der nachstehend abgebildeten Dichtefunktion die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Magnete werden aussortiert, wenn ihre Länge nicht im Intervall [2,4 mm; 2,6 mm] liegt.

- 2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Magnet aussortiert wird.
- 3) Ermitteln Sie, welche Standardabweichung erforderlich wäre, wenn nur 1 % der Magnete aussortiert werden soll.

Möglicher Lösungsweg

a1) Beim Abkühlprozess ist der Klammerausdruck $T_U - T$ negativ. Da die Änderung $\frac{dT}{dt}$ negativ ist, muss der Proportionalitätsfaktor k positiv sein.

a2) $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_U)$

$$\frac{dT}{T - T_U} = -k \cdot dt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_U} = -k \cdot \int dt$$

$$\ln|T - T_U| = -k \cdot t + C_1$$

$$T(t) = T_U + C \cdot e^{-k \cdot t}$$

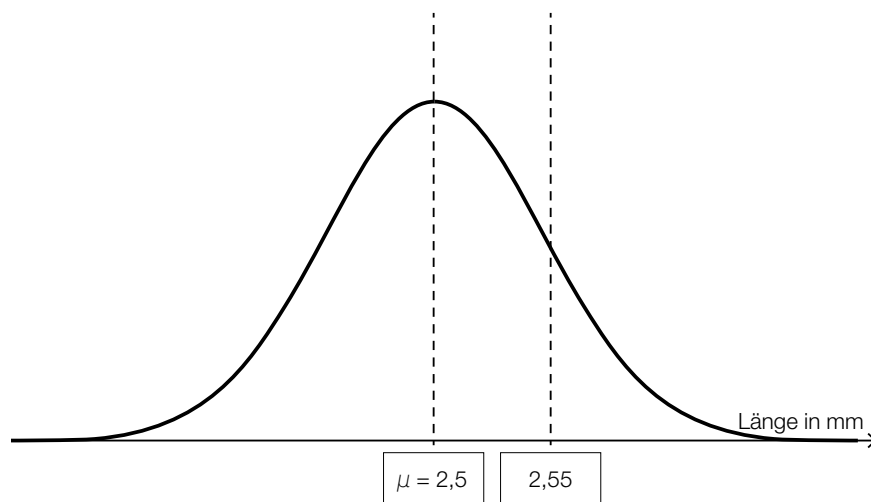
a3) $440 = 30 + C \cdot e^{-k \cdot 0}$
 $C = 410$

b1) $T = 300 \text{ °C}$

b2) $300 = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot 10}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
 $k = 0,04289\dots$

c1)



c2) $1 - P(2,4 \leq X \leq 2,6) \approx 0,0455$

c3) $P(X \leq 2,6) = 0,995$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
 $\sigma = 0,0388\dots \text{ mm}$