

Newton'sches Abkühlungsgesetz

Die nachstehende Differenzialgleichung beschreibt den Temperaturverlauf eines abkühlenden Bauteils in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_U - T)$$

t ... Zeit in Minuten (min)

$T(t)$... Temperatur des Bauteils zur Zeit t in °C

T_U ... Umgebungstemperatur in °C

k ... Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

- a) Das Bauteil A wird in einen Kühlraum gebracht, in dem es eine Temperatur von $T_U = -10$ °C hat. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet:

$$T(t) = -10 - C \cdot e^{-k \cdot t}$$

- 1) Zeigen Sie, dass diese Funktion T die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzialgleichung ist.

- b) Das Bauteil B wird in eine Lagerhalle ($T_U = 15$ °C) gebracht. Für den Proportionalitätsfaktor k gilt in diesem Fall: $k = 0,8 \text{ min}^{-1}$.
Zu Beginn ($t = 0$) hat dieses Bauteil eine Temperatur von 80 °C.

- 1) Ermitteln Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die Lösung für dieses Anfangswertproblem.

- c) Das Bauteil C wird im Freien gelagert. Die Lösung der Differenzialgleichung für dieses Bauteil lautet:

$$T(t) = 5 \cdot (8 \cdot e^{-k \cdot t} - 1)$$

- 1) Geben Sie die Umgebungstemperatur T_U an.

$$T_U = \underline{\hspace{2cm}} \text{ °C}$$

- 2) Geben Sie die Temperatur zu Beginn ($t = 0$) dieses Abkühlungsvorganges an.

$$\text{Temperatur zu Beginn: } \underline{\hspace{2cm}} \text{ °C}$$

Möglicher Lösungsweg

a1) $T(t) = -10 - C \cdot e^{-k \cdot t}$

$$T'(t) = k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t}$$

Einsetzen in Differenzialgleichung: $k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t} = k \cdot (T_U + 10 + C \cdot e^{-k \cdot t})$

$$k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t} = k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t}$$

Die angegebene Lösung ist korrekt.

b1) $\int \frac{dT}{15 - T} = 0,8 \cdot \int dt$ oder $\int \frac{T'}{15 - T} \cdot dt = 0,8 \cdot \int dt$

$$\frac{\ln |15 - T|}{-1} = 0,8 \cdot t + C_1$$

$$T(t) = 15 - C \cdot e^{-0,8 \cdot t}$$

$$T(0) = 80$$

$$15 - C = 80$$

$$C = -65$$

$$T(t) = 15 + 65 \cdot e^{-0,8 \cdot t}$$

c1) $T_U = -5 \text{ °C}$

c2) Temperatur zu Beginn: 35 °C