

Bewegung eines Bootes*

Aufgabennummer: B_074

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

a) Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$$

m ... Masse des Bootes

$v > 0$... Geschwindigkeit des Bootes

$k > 0$... Konstante

t ... Zeit

- Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.
- Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

b) Ein Boot wird von einem Motorboot geschleppt. Zur Zeit $t = 0$ s wird das Schleppseil gelöst.

Die nachstehende Tabelle gibt die Geschwindigkeit des Bootes zu 4 verschiedenen Zeiten an.

Zeit in s	3	9	15	21
Geschwindigkeit in m/s	6,5	2,5	1,1	0,5

- Ermitteln Sie mithilfe der Daten aus der obigen Tabelle eine Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit des Bootes beschreibt.
- Ermitteln Sie mit dieser Ausgleichsfunktion einen Schätzwert für die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s.

c) Für einen bestimmten Zeitraum kann der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines anderen Motorboots durch die Funktion v_{MB} näherungsweise beschrieben werden:

$$v_{\text{MB}}(t) = a + b \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-t})$$

t ... Zeit

$v_{\text{MB}}(t)$... Geschwindigkeit des Motorboots zur Zeit t

a, b ... positive Konstante

- Argumentieren Sie mathematisch, dass die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote dieser Funktion ist.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v$

Da v , m und k größer als null sind, bedeutet das Minuszeichen, dass die Geschwindigkeit abnimmt.

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

oder:

$$\int \frac{v'}{v} dt = \int -\frac{k}{m} dt$$

$$\ln|v(t)| = -\frac{k}{m} \cdot t + C_1$$

$$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

b) Ermitteln der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$v(t) = 9,49 \cdot 0,8677^t \text{ (Parameter gerundet)}$$

oder:

$$v(t) = 9,49 \cdot e^{-0,1419 \cdot t} \text{ (Parameter gerundet)}$$

t ... Zeit in s

$v(t)$... Geschwindigkeit zur Zeit t in s

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$$v(5) = 4,66...$$

Die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s beträgt rund 4,7 m/s.

c) Für t gegen unendlich gehen $e^{-0,1 \cdot t}$ und e^{-t} gegen null und damit geht auch $b \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-t})$ gegen null. Somit ist die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote von v_{MB} .

Lösungsschlüssel

- a) 1 × D: für die richtige Argumentation
1 × B: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung
- b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Geschwindigkeit
- c) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation