

Raketenstart

Aufgabennummer: B_054

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Trägerraketen ermöglichen es, schwere Nutzlasten in die Erdumlaufbahn zu befördern. Ariane 5 ist die leistungsfähigste europäische Trägerrakete.

Beim Start der Ariane 5 lässt sich der senkrecht nach oben zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft annähernd durch eine quadratische Funktion beschreiben.

a)

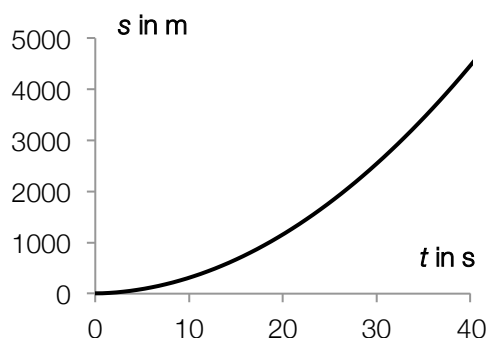
t in s	$s(t)$ in m
0	0
2	16,1
4	53,8

t ... Zeit in Sekunden (s)

$s(t)$... zurückgelegter Weg in Metern (m) zum Zeitpunkt t

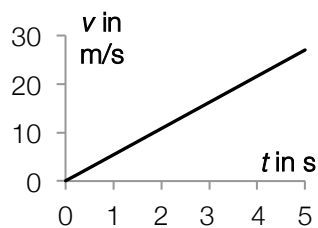
- Stellen Sie die allgemeine Funktion s für den gegebenen Zusammenhang auf.
- Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus der Tabelle die entsprechenden Parameter der Funktion s .

b) Folgender Graph beschreibt modellhaft den zurückgelegten Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t in der Startphase der Rakete:



- Erklären Sie den Unterschied zwischen der Momentangeschwindigkeit v für den Zeitpunkt $t_0 = 30$ s und der Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ für $\Delta t = 30$ s – 0 s mithilfe der Begriffe *Differenzenquotient* und *Differenzialquotient*.
- Veranschaulichen Sie diese in obiger Grafik.

- c) Die Beschleunigung der Ariane 5 in der Startphase beträgt etwa $5,4 \text{ m/s}^2$.
- Stellen Sie die Funktionen für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Weg in Abhängigkeit von der Zeit auf.
- d) Der Graph stellt die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v der Rakete in den ersten 5 Sekunden des Starts dar.



- Veranschaulichen Sie die Abhängigkeit der Beschleunigung-Zeit-Funktion a und der Weg-Zeit-Funktion s von der gegebenen Funktion v , indem Sie a und s zeichnen.
- Erklären Sie, was man aus der Kenntnis der Eigenschaften des Graphen von v über die Graphen von a und s aussagen kann.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

- a) Aufstellen der allgemeinen Gleichung einer quadratischen Funktion:

$$s(t) = at^2 + bt + c$$

Aufstellen eines Gleichungssystems:

I: $c = 0$

II: $4a + 2b = 16,1$

III: $16a + 4b = 53,8$

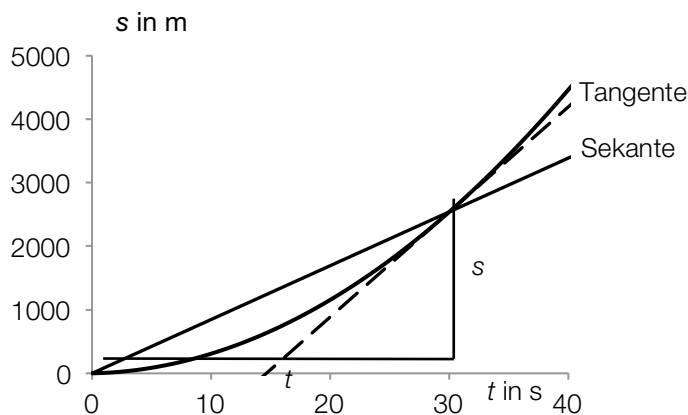
Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$a = 2,7, b = 2,65, c = 0$$

$$s(t) = 2,7t^2 + 2,65t$$

Alternative Lösungen über Datenfit-Routine sind auch zulässig,
z. B. mit GeoGebra: `TrendPoly {Liste von Punkten; Grad der Funktion}`.

- b)



$$\bar{v}(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} \dots \text{Steigung der Sekante, Differenzenquotient}$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist der Differenzenquotient aus Wegdifferenz durch Zeitdifferenz. (In diesem Fall ist $\Delta t = 30$ s, Δs errechnet man aus der Funktionsgleichung.)

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t) \dots \text{Steigung der Tangente, Differenzialquotient}$$

Die Momentangeschwindigkeit erhält man durch die Bildung des Grenzwerts des Differenzenquotienten, wobei man Δt gegen 0 streben lässt. Der Differenzialquotient ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit und die Steigung der Tangente an der Stelle $t = 30$ s.

c) $a(t) = 5,4$

$$v(t) = \int 5,4 dt = 5,4t + C_1$$

$$s(t) = \int (5,4t + C_1) dt = 2,7t^2 + C_1t + C_2$$

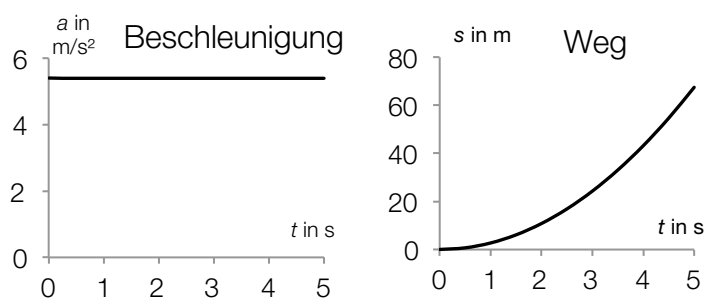
$C_2 = 0$, da der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.

$C_1 = 0$, da die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.

$$v(t) = 5,4t$$

$$s(t) = 2,7t^2$$

d)



a ist die Steigungsfunktion von v . Da die Geschwindigkeit linear steigt, ist die Beschleunigung konstant, und der Graph von a ist eine waagrechte Gerade.

v ist die Steigungsfunktion von s . Da die Geschwindigkeit linear zunimmt, steigt der Weg mit dem Quadrat der Zeit, und s ist eine quadratische Funktion.

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis
- d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

- a) —
- b) —
- c) —
- d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) A Modellieren und Transferieren
- b) D Argumentieren und Kommunizieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) —
- c) A Modellieren und Transferieren
- d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) leicht
- c) mittel
- d) schwer

Punkteanzahl:

- a) 3
- b) 4
- c) 4
- d) 4

Thema: Physik

Quellen: <http://www.raumfahrer.net>, <http://www.esa.int>