

Bakterienkultur*

Aufgabennummer: B_049

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: $N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N . Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

- Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf.
- Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
- Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind.
- Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat.

- b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

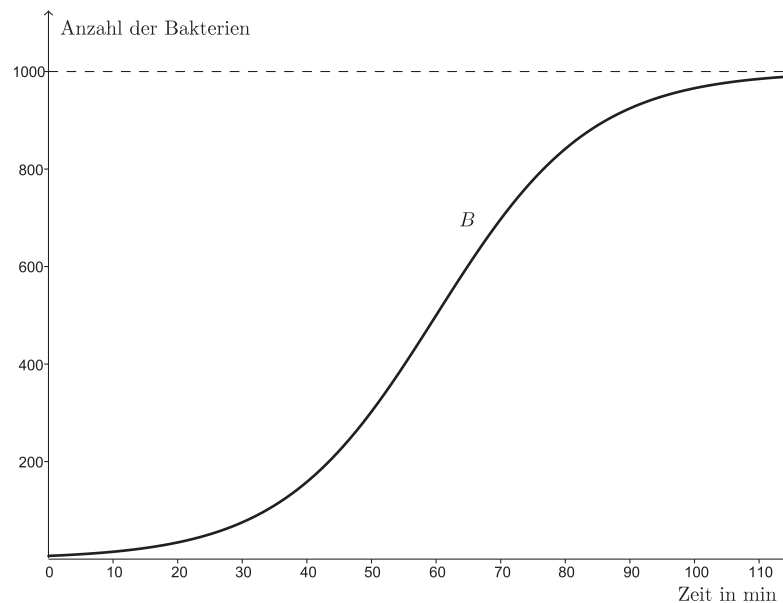
- Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt.
- Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Die Funktion B beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten

$B(t)$... Anzahl der Bakterien zur Zeit t



- Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist.

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8,35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1000 - B) \quad \text{mit } B > 0$$

- Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$$

$$\ln|N| = k \cdot t + c$$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: N mit $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$N(0) = 50$ und $N(100) = 750$ liefert: $C = 50$ und $k = 0,0270\dots$

$N(180) = 6545,3\dots \approx 6545$

Nach 3 Stunden sind rund 6545 Bakterien vorhanden.

Wenn die Wachstumsrate der Bakterienkultur größer ist, dann bedeutet das, dass die Anzahl der Bakterien schneller wächst.

b) Ermittlung der exponentiellen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(t) = 69,43 \cdot e^{0,03065 \cdot t}$$

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten

$f(t)$... Bakterienanzahl zur Zeit t

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Lösen der Gleichung $f(t) = 1\,000$ mittels Technologieeinsatz:

$t \approx 87,0$

Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1 000 Bakterien zu erwarten.

c) Ablesen der Wendestelle der Funktion B : $t = 60$ min

Toleranzbereich: [55; 65]

Rund 60 Minuten nach Beginn der Beobachtung ist das Wachstum der Bakterienkultur am größten.

Für $B < 1\,000$ ist jeder Faktor auf der rechten Seite der Differenzialgleichung positiv, also $\frac{dB}{dt} > 0$. Daher nimmt die Bakterienzahl für diese Werte zu.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B1: für die richtige allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Bakterienanzahl nach 3 Stunden
1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Wachstumsverhaltens
- b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung, nach welcher Zeit 1 000 Bakterien zu erwarten sind
- c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [55; 65]
1 × D: für eine richtige Argumentation anhand der Differenzialgleichung