

Schadstoffausbreitung*

Aufgabennummer: B_048

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

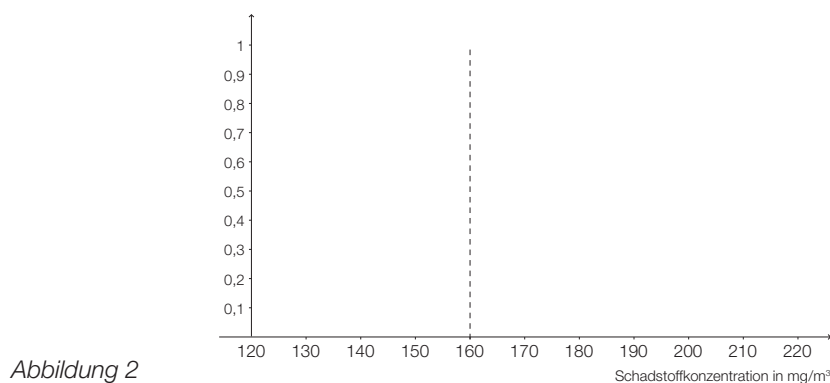
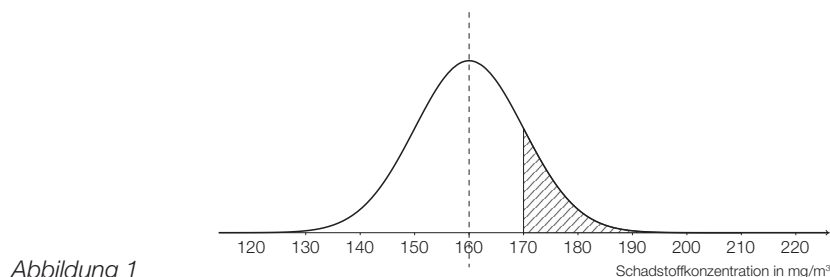
Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m^3). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m^3	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.
- Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Schadstoffkonzentration wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 8,5 \text{ mg}/\text{m}^3$ beträgt.

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.



- Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein.
- Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2.
- Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

- c) Die Fabrikleitung geht vom Erwartungswert $\mu = 160 \text{ mg/m}^3$ und von der Standardabweichung $\sigma = 10 \text{ mg/m}^3$ aus.
- Ermitteln Sie den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstrebereich).
 - Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstrebereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\bar{x} = 158,5 \text{ mg/m}^3$$

Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

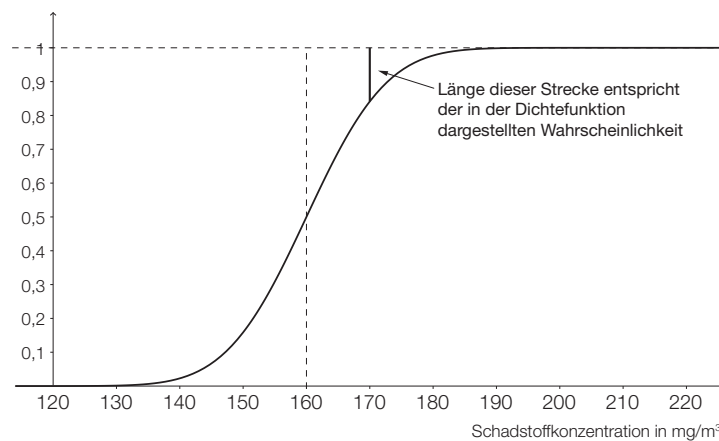
$$n = 10$$

$$\alpha = 5 \%$$

$$u_{0,975} = 1,959...$$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in mg/m^3 : $153,2 \leq \mu \leq 163,8$.

b)



Der Wert der Verteilungsfunktion an einer Stelle x ist das Integral der Dichtefunktion von $-\infty$ bis x .

Oder umgekehrt: Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion.

c) 99-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$$

$$\alpha = 1 \%$$

$$u_{0,995} = 2,575...$$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mg/m^3 : $[134,2; 185,8]$.

Der 95-%-Zufallsstreubereich ist schmaler als der entsprechende 99-%-Zufallsstreubereich.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Stichprobenmittelwerts $\bar{x}$
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Konfidenzintervalls
- b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Verteilungsfunktion (eine qualitative Beschriftung der Ordinatenachse ist nicht notwendig)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2
1 × D: für das richtige Erklären des mathematischen Zusammenhangs zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion
- c) 1 × B: für die richtige Ermittlung des Zufallsstrebereichs
1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung der Breite des Zufallsstrebereichs