

Aufgaben mit Herz

Aufgabennummer: B_026

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Eine Druckschablone in Form eines Herzens soll gezeichnet werden (siehe Abbildung 1).

Im linken oberen Bereich für $0 \text{ dm} \leq x \leq 1 \text{ dm}$ wird die Umrisslinie durch eine quadratische Funktion f definiert, wobei sich der Scheitel der Parabel bei $x = 1$ befindet. Im rechten oberen Bereich für $1 \text{ dm} \leq x \leq 1,5 \text{ dm}$ ist die Herzlinie durch einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 0,5 \text{ dm}$ definiert. Der untere Teil der Umrisslinie entsteht durch Spiegelung des oberen Teils an der x -Achse.

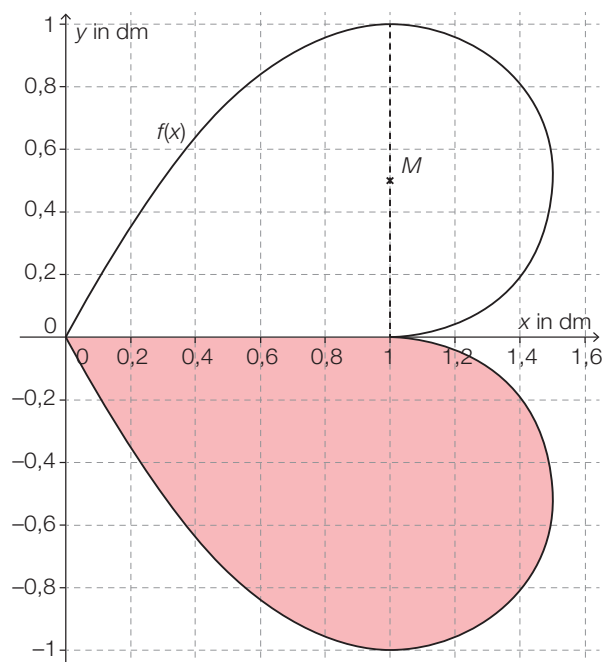


Abbildung 1

- a) Die quadratische Funktion f hat die Form $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$, wobei x_s und y_s die Koordinaten des Scheitels sind.

– Berechnen Sie den Parameter a .

Die Koordinaten eines jeden Punktes $(x|y)$, der auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (1|0,5)$ und dem Radius $r = 0,5$ liegt, erfüllen die Gleichung $(y - 0,5)^2 + (x - 1)^2 = 0,25$.

– Ermitteln Sie anhand dieser Gleichung die y -Koordinaten für $x = 1,4$.

- b) Eine andere Herzkurve erhält man, wenn man im Bereich $0 \text{ dm} \leq x \leq 1 \text{ dm}$ die obige Funktion f durch die kubische Funktion g mit $g(x) = -2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$ ersetzt.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in die obige Darstellung hinzu.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des gesamten Flächeninhalts A dieser neuen Herzfläche auf.

$A =$ _____

– Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

- c) Eine Herzhälfte des in Abbildung 3 dargestellten Druckmusters erhält man durch die beiden Funktionen h_1 und h_2 (vgl. Abbildung 2):

$$h_1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad h_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x^2}$$

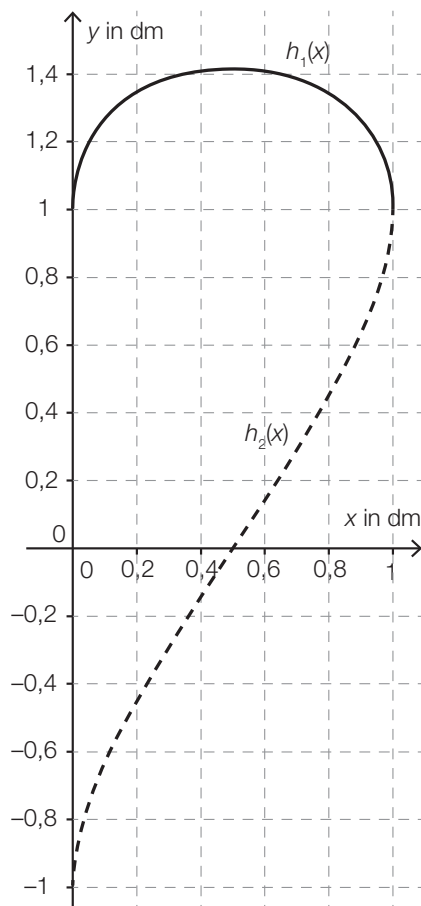


Abbildung 2



Abbildung 3

- Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichungen, dass der Definitionsbereich D für beide Funktionen $D = [0; 1]$ ist.
 - Bestimmen Sie die Nullstelle von h_2 im Definitionsbereich.
- d) Durch schrittweise Halbierung der Flächeninhalte entsteht das in Abbildung 3 dargestellte Druckmuster.
- Berechnen Sie die schwarze Fläche dieses Musters, wenn die Gesamtfläche des größten Herzens den Flächeninhalt $\pi \text{ dm}^2$ hat.

Hinweis zur Aufgabe:

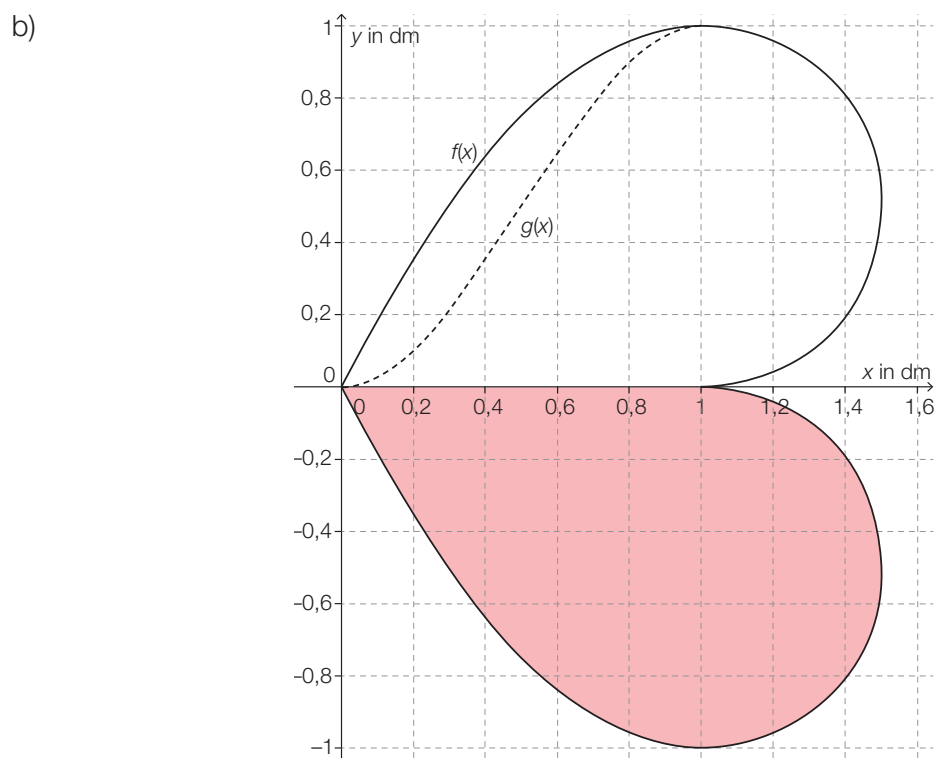
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot (x-1)^2 + 1$
 $f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{0,25 - (x-1)^2} + 0,5$$

Damit erhält man: $y_1 = 0,2$ und $y_2 = 0,8$



$$A = 0,5^2 \cdot \pi + 2 \cdot \int_0^1 g(x) dx$$

$$A = \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \text{ dm}^2 \approx 1,785 \text{ dm}^2$$

- c) Beide Wurzelargumente müssen positiv sein, d. h. $x \geq 0$ und $1 - x^2 \geq 0$, womit $1 \geq x^2$.
 Beide Bedingungen ergeben $D = [0; 1]$.

$$\sqrt{x} - \sqrt{1-x^2} = 0$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$$

- d) Die schwarze Fläche ergibt sich durch $A_{\text{ges}} = \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} \right) = \frac{11 \cdot \pi}{16} \approx 2,16 \text{ dm}^2$.

Klassifikation

☐ Teil A☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 3 Funktionale Zusammenhänge
- c) 3 Funktionale Zusammenhänge
- d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 4 Analysis
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) D Argumentieren und Kommunizieren
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) B Operieren und Technologieeinsatz
- d) —

Schwierigkeitsgrad:

- a) leicht
- b) mittel
- c) mittel
- d) mittel

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 3
- c) 2
- d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —