

Abrissbirnen*

Aufgabennummer: B_012

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.

- a) Eine Abrissbirne hat die Form einer Kugel mit dem Durchmesser d . Die Masse m und die Dichte ρ der Kugel sind bekannt. Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

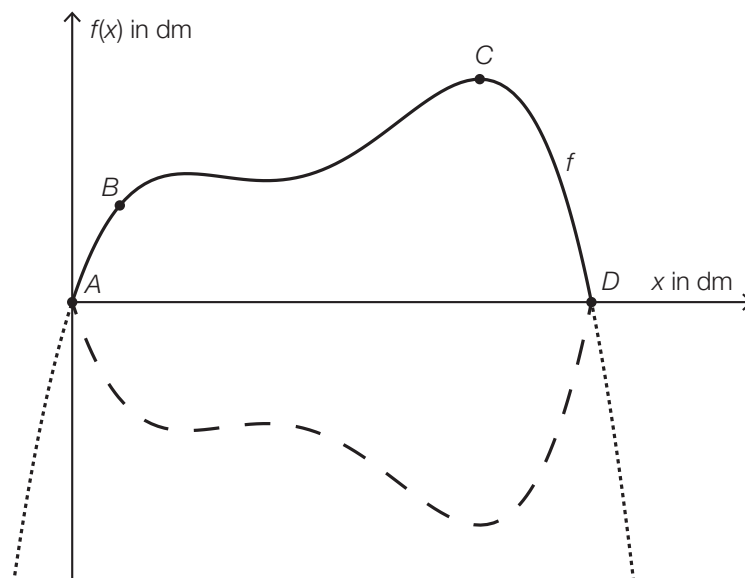
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Durchmessers d aus m und ρ .

$d =$ _____

Eine einfache Regel besagt: „Um die Masse einer Kugel zu verdoppeln, ist ihr Durchmesser um rund ein Viertel zu vergrößern.“

– Zeigen Sie allgemein, dass diese Regel richtig ist.

- b) Eine andere Abrissbirne kann als Körper modelliert werden, der durch Rotation des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ um die x -Achse entsteht.



Dabei gilt:

$A = (0|0)$, $B = (1,1|2,2)$, $C = (9,4|5,1)$, $D = (12|0)$

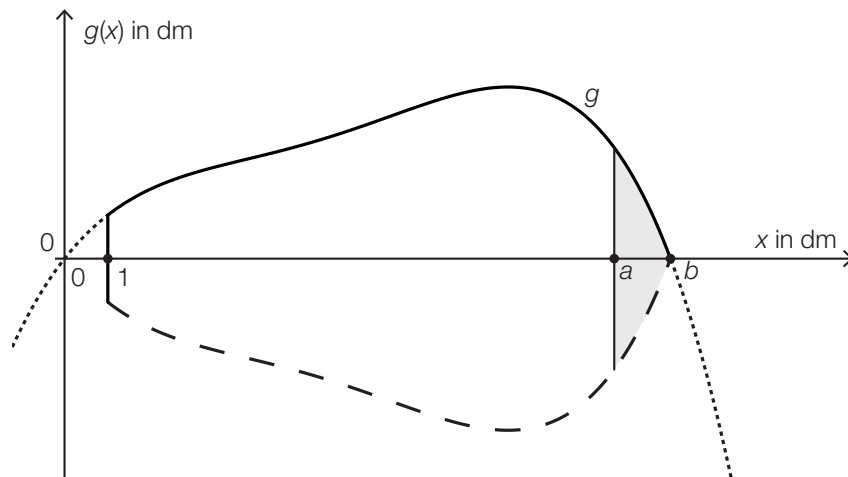
Im Punkt C hat die Abrissbirne den größten Durchmesser.

- Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A, B, C und D ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion f .
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von f .

* ehemalige Klausuraufgabe

- c) Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; b]$ um die x -Achse entsteht die Form einer weiteren Abrisssbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$$g(x) = -0,00157 \cdot x^4 + 0,03688 \cdot x^3 - 0,29882 \cdot x^2 + 1,26325 \cdot x$$



- Berechnen Sie die Nullstelle b .

Das Volumen dieser Abrisssbirne soll verkleinert werden.

Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; a]$ um die x -Achse entsteht die Form einer Abrisssbirne mit einem um 10 dm^3 kleineren Volumen.

- Berechnen Sie die in der obigen Abbildung dargestellte Stelle a .

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

$$\text{a) } V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}; \quad V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot \rho}} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot \rho}} \quad \text{oder} \quad d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot \rho}}$$

d_{neu} ... Durchmesser bei doppelter Masse

$$d_{\text{neu}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot m}{\pi \cdot \rho}} = \sqrt[3]{2} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot \rho}}}_{= d} = \sqrt[3]{2} \cdot d \approx 1,26 \cdot d$$

Der Durchmesser ist daher um rund 26 % (also um rund ein Viertel) zu vergrößern.

$$\text{b) } f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

$$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$$

$$\text{I: } f(0) = 0$$

$$\text{II: } f(1,1) = 2,2$$

$$\text{III: } f(9,4) = 5,1$$

$$\text{IV: } f(12) = 0$$

$$\text{V: } f'(9,4) = 0$$

oder:

$$\text{I: } a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$$

$$\text{II: } a \cdot 1,1^4 + b \cdot 1,1^3 + c \cdot 1,1^2 + d \cdot 1,1 + e = 2,2$$

$$\text{III: } a \cdot 9,4^4 + b \cdot 9,4^3 + c \cdot 9,4^2 + d \cdot 9,4 + e = 5,1$$

$$\text{IV: } a \cdot 12^4 + b \cdot 12^3 + c \cdot 12^2 + d \cdot 12 + e = 0$$

$$\text{V: } 4 \cdot a \cdot 9,4^3 + 3 \cdot b \cdot 9,4^2 + 2 \cdot c \cdot 9,4 + d = 0$$

Berechnung der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:

$$a = -0,0066...$$

$$b = 0,1461...$$

$$c = -1,0476...$$

$$d = 2,9843...$$

$$e = 0$$

c) Berechnung der Nullstelle b mittels Technologieeinsatz: $b = 14,0...$

$$\pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx = 10$$

Berechnung der Stelle a mittels Technologieeinsatz: $a = 12,7...$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × D: für den richtigen Nachweis
- b) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten
- c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Nullstelle b
1 × B2: für die richtige Berechnung der Stelle a