

Usain Bolt

Aufgabennummer: B_007

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

- a) Bei den Olympischen Sommerspielen 2012 in London sprintete Usain Bolt im 100-Meter-Finallauf mit einer Zeit von 9,63 Sekunden (s) durch das Ziel.

Die bei diesem Lauf gemessenen Geschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde (km/h) sind in folgender Tabelle festgehalten:

Geschwindigkeit in km/h	23,54	34,22	39,07	41,27	42,27	42,72	42,93	43,02	43,064
Zeit in s	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Die Laufgeschwindigkeit kann annähernd durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = 43,1 \cdot (1 - e^{b \cdot t})$$

t ... Laufzeit in s

$v(t)$... Geschwindigkeit in km/h zum Zeitpunkt t

- Stellen Sie die Daten der Tabelle in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
- Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme eines beliebigen Messwertes der Tabelle den Parameter b der Funktion v (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

- b) Die Geschwindigkeit, mit der Usain Bolt 2009 den Weltrekord über 200 m lief, lässt sich annähernd durch folgende Funktion v beschreiben:

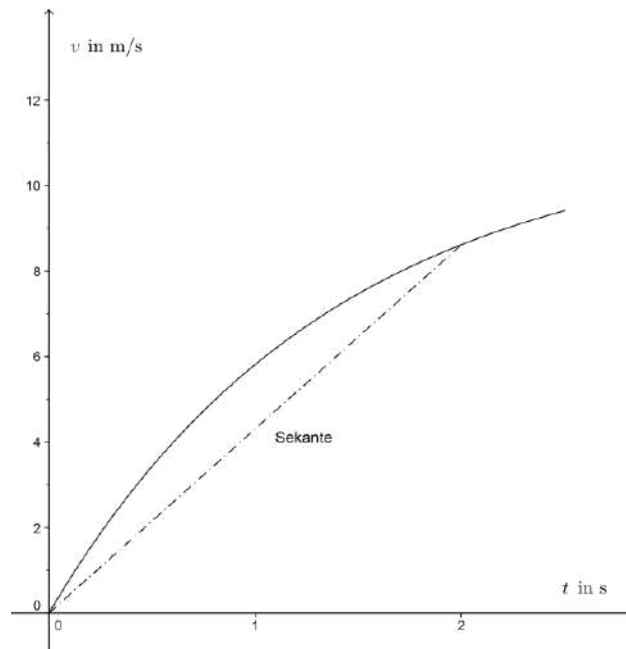
$$v(t) = \frac{101}{9} \cdot (1 - e^{-0,73 \cdot t})$$

t ... Laufzeit in s

$v(t)$... Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t

- Stellen Sie die Funktion des Weges s in Abhängigkeit von der Zeit t auf.
- Berechnen Sie, in welcher Zeit Usain Bolt die ersten 100 m zurücklegte (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

- c) Die Laufgeschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden des Weltrekordlaufs über 200 m ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



- Lesen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekante ab.
- Interpretieren Sie diese Steigung physikalisch.

- d) Zwei Läufer treten gegeneinander an.

Der vom ersten Läufer zurückgelegte Weg s_1 in Metern (m) kann durch die Funktion $s_1(t) = 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15$ beschrieben werden.

Der vom zweiten Läufer zurückgelegte Weg s_2 in Metern (m) kann durch die Funktion $s_2(t) = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16$ beschrieben werden.

Mit der folgenden Gleichung wird diejenige Zeit t berechnet, nach der der Abstand zwischen den beiden Läufern 95 cm beträgt.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0,95 \\
 (2) \quad & 0,05 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} \\
 (3) \quad & 0,05 = e^{-0,72 \cdot t} \cdot (16 - 15) \\
 (4) \quad & \ln(0,05) = 0,72 - t + \ln(1) \\
 (5) \quad & \ln(0,05) - 0,72 = -t \\
 (6) \quad & t \approx 3,7 \text{ s}
 \end{aligned}$$

In der Rechnung befindet sich ein Umformungsfehler.

- Bestimmen Sie diejenige Zeile, in der der Umformungsfehler passiert ist.
- Stellen Sie die Rechnung richtig.
- Erklären Sie, worin der Umformungsfehler besteht.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

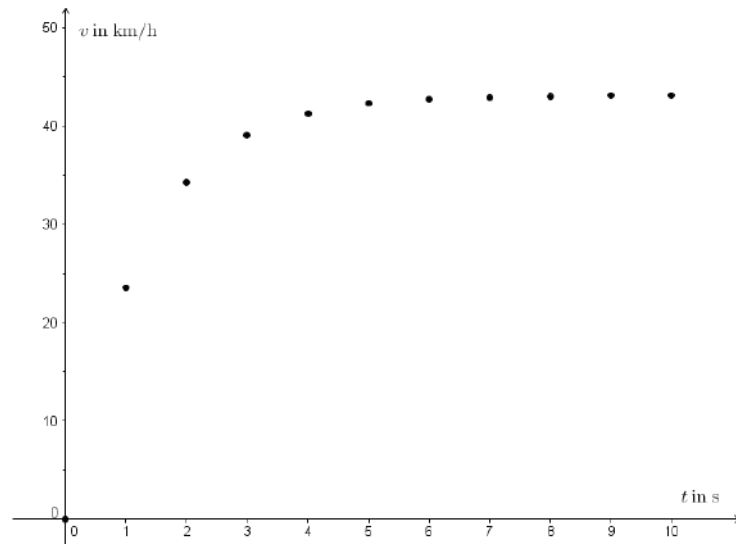
Möglicher Lösungsweg

- a) **Parameter b :**
Einsetzen eines Punktes
z. B. (1 | 23,54)

$$23,54 = 43,1 \cdot (1 - e^{b \cdot 1})$$

$$\Rightarrow b \approx -0,79$$

$$v(t) = 43,1 \cdot (1 - e^{-0,79 \cdot t})$$



- b) Die Funktion v ist die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion. Der zurückgelegte Weg wird daher mittels Integration der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion über den entsprechenden Zeitraum ermittelt:

$$s(t) = \int_0^t \frac{101}{9} \cdot (1 - e^{-0,73 \cdot x}) dx = \frac{101}{9} \cdot \left(x - \frac{e^{-0,73 \cdot x}}{-0,73} \right) \Big|_0^t = 15,3729 \cdot e^{-0,73 \cdot t} + \frac{101}{9} \cdot t - 15,3729$$

Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz:

$$15,3729 \cdot e^{-0,73 \cdot t} + \frac{101}{9} \cdot t - 15,3729 = 100$$

$$\Rightarrow t \approx 10,28 \text{ s}$$

Die ersten 100 m lief Usain Bolt in 10,28 s.

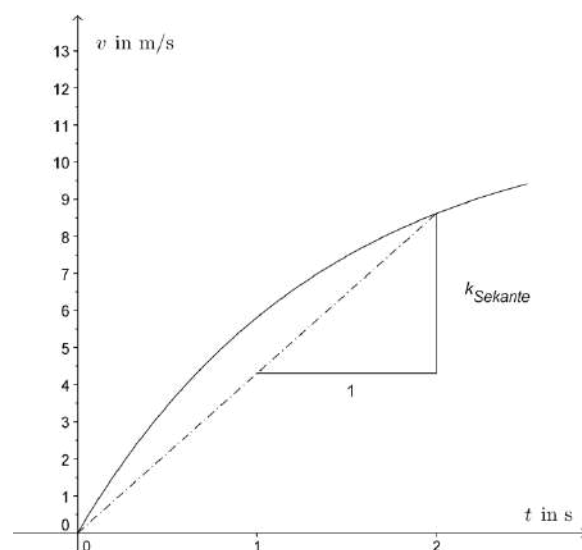
- c) Steigung der Sekante:

1. Art: $k_{\text{Sekante}} = 4,3$

2. Art: $k_{\text{Sekante}} = \frac{8,6}{2} = 4,3$

Die Steigung der Sekante gibt die mittlere Beschleunigung während der ersten 2 Sekunden an und beträgt 4,3 m/s².

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.



- d) $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ Logarithmusfunktionen führen eine Potenz in ein Produkt über.
 $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ Logarithmusfunktionen führen ein Produkt in eine Summe über.
- (1) $15 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0,95$
(2) $0,05 = 16 \cdot e^{-0,72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0,72 \cdot t}$
(3) $0,05 = e^{-0,72 \cdot t} \cdot (16 - 15)$
(4) $\ln(0,05) = 0,72 - t + \ln(1)$ $\ln(0,05) = -0,72 \cdot t \cdot \ln(e) + \ln(1)$
(5) $\ln(0,05) - 0,72 = -t$
(6) $t \approx 3,7 \text{ s}$

Klassifikation

☐ Teil A

☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

- a) 3 Funktionale Zusammenhänge
- b) 4 Analysis
- c) 4 Analysis
- d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

- a) 2 Algebra und Geometrie
- b) 2 Algebra und Geometrie
- c) —
- d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

- a) B Operieren und Technologieeinsatz
- b) A Modellieren und Transferieren
- c) C Interpretieren und Dokumentieren
- d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

- a) —
- b) B Operieren und Technologieeinsatz
- c) —
- d) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

- a) mittel
- b) schwer
- c) mittel
- d) leicht

Punkteanzahl:

- a) 2
- b) 4
- c) 2
- d) 3

Thema: Sport

Quellen: —