

Baumkronenpfad*

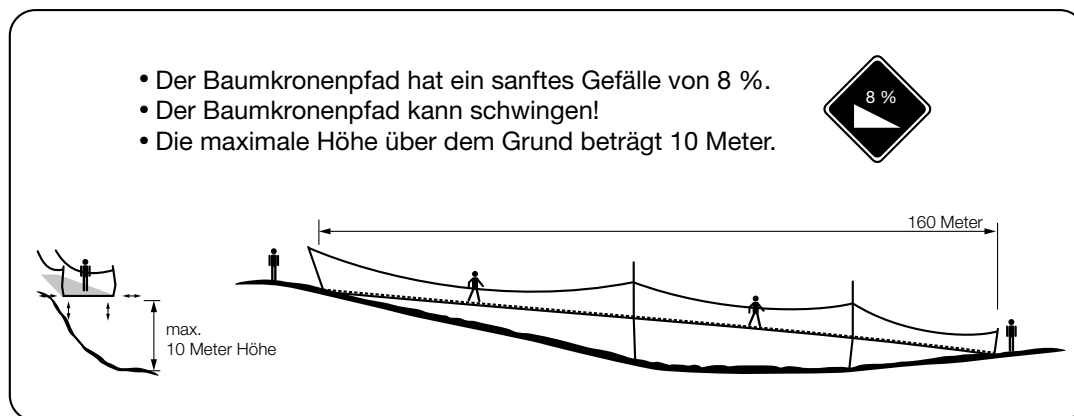
Aufgabennummer: A_230

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



a) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen:

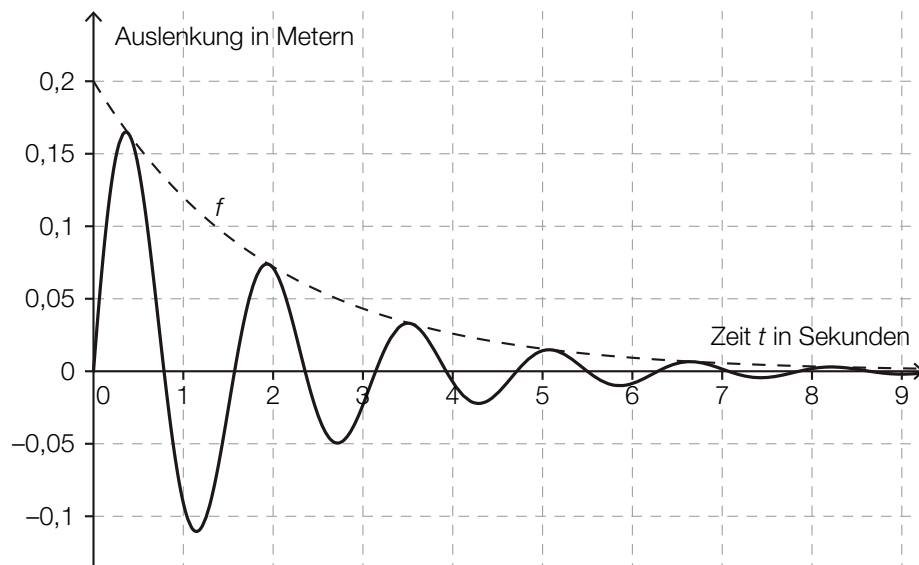
„Der Baumkronenpfad hat ein sanftes Gefälle von 8 %.“

Dabei wird der Baumkronenpfad vereinfacht als geradlinig angenommen. Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.

- Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Startpunkt und Endpunkt.
- Berechnen Sie den Neigungswinkel des Baumkronenpfads.

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!“

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik die maximale Auslenkung ab.

In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende“ strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

– Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.

– Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt:
 $0 < a < 1$.

- c) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Die maximale Höhe über dem Grund beträgt 10 Meter.“ Diese maximale Höhe wird in einer horizontalen Entfernung von 90 m vom Startpunkt erreicht.

In 40 m horizontaler Entfernung vom Startpunkt beträgt die Höhe 8 m.
Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.
Im Anfangspunkt und im Endpunkt ist die Höhe 0 m.

Die Höhe über dem Grund abhängig von der horizontalen Entfernung vom Startpunkt soll näherungsweise mithilfe einer Polynomfunktion 4. Grades h mit $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden.

- Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion berechnet werden können.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0,08 = 12,8$

$$\alpha = \arctan(0,08) = 4,57...^\circ$$

Auch $\alpha = -4,57...^\circ$ ist als richtig zu werten.

Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b) maximale Auslenkung: 0,17 m

Toleranzbereich: [0,16 m; 0,18 m]

$$c = f(0) = 0,2$$

Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a :
 $0 < a < 1$.

c) $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$$h'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$$

$$h(0) = 0$$

$$h(40) = 8$$

$$h(90) = 10$$

$$h(160) = 0$$

$$h'(90) = 0$$

oder:

$$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$$

$$8 = a \cdot 40^4 + b \cdot 40^3 + c \cdot 40^2 + d \cdot 40 + e$$

$$10 = a \cdot 90^4 + b \cdot 90^3 + c \cdot 90^2 + d \cdot 90 + e$$

$$0 = a \cdot 160^4 + b \cdot 160^3 + c \cdot 160^2 + d \cdot 160 + e$$

$$0 = 4 \cdot a \cdot 90^3 + 3 \cdot b \cdot 90^2 + 2 \cdot c \cdot 90 + d$$

Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von $-h$ ist als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Höhenunterschieds
1 × B2: für die richtige Berechnung des Neigungswinkels
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.
- b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der maximalen Auslenkung
im Toleranzbereich [0,16 m; 0,18 m]
1 × C2: für das richtige Ablesen des Parameters c
1 × D: für die richtige Begründung zum Parameter a
- c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der gegebenen Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der gegebenen Maximumstelle
Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von $-h$ ist als richtig zu werten.