

Bevölkerungsentwicklung*

Aufgabennummer: A_218

Technologieeinsatz:

möglich ☐

erforderlich ☒

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

- a) Zu Beginn des Jahres 1992 lebten in der steirischen Gemeinde Eisenerz 7 965 Menschen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 4 524.

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl in Eisenerz soll näherungsweise durch eine lineare Funktion N_1 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion N_1 .

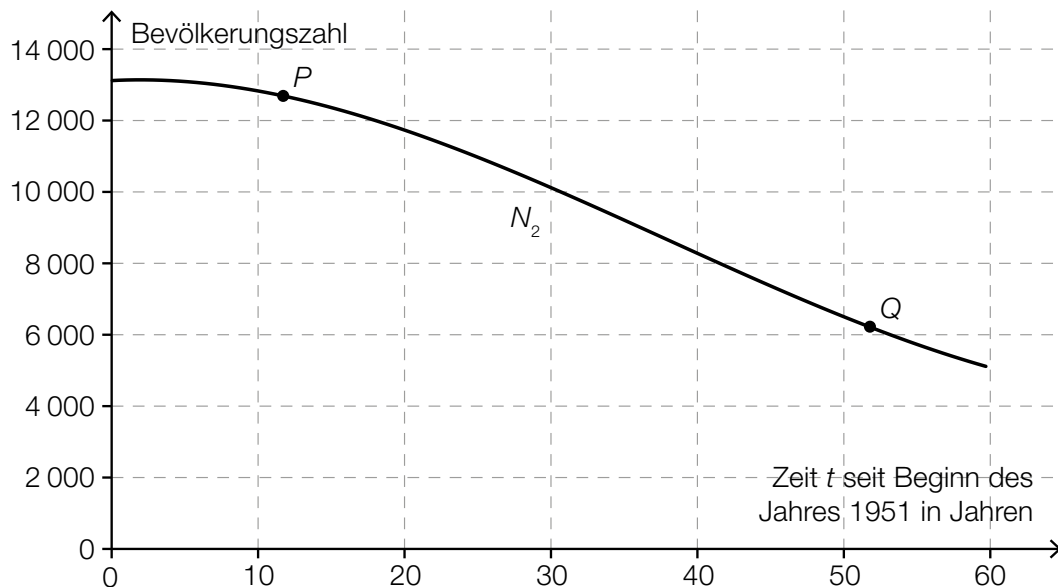
t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1992

$N_1(t)$... Bevölkerungszahl zur Zeit t

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Funktion N_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

- b) Im nachstehenden Diagramm wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl von Eisenerz im Zeitraum von 1951 bis 2011 näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion N_2 dargestellt.



- Ordnen Sie den Punkten P und Q jeweils die an der entsprechenden Stelle zutreffende Aussage aus A bis D zu. [2 zu 4]

P	
Q	

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

- c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3 , die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
- Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3 , welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$$d = N_1(0) = 7\,965$$

$$k = \frac{4\,524 - 7\,965}{22} = -156,4\dots$$

$$N_1(t) = -156 \cdot t + 7\,965$$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

P	C
Q	B

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$

$$4\,524 = 10\,068 \cdot a^{33} \Rightarrow a = 0,976\dots$$

$$N_3(t) = 10\,068 \cdot 0,976\dots^t$$

$$N_3(49) = 3\,069,5\dots$$

oder: $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$$4\,524 = 10\,068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \Rightarrow \lambda = 0,024\dots$$

$$N_3(t) = 10\,068 \cdot e^{-0,024\dots \cdot t}$$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_1
 1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
- b) 1 × C: für die richtige Zuordnung
- c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_3
 1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030