

Koffein

Aufgabennummer: A_199

Technologieeinsatz:

möglich ☒

erforderlich ☐

Die Abbaurate von Koffein kann von Person zu Person stark variieren.

a) Für Lena liegt die Halbwertszeit bei 1,5 Stunden.

– Modellieren Sie den Abbau von 80 mg Koffein in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion.

b) Klara hat eine große Prüfung vor sich und muss dafür lernen. Um beim Lernen „fit“ zu sein, trinkt sie um 16 Uhr einen Energydrink, der 80 mg Koffein enthält. Um 17:30 Uhr isst sie eine Tafel Bitterschokolade, die 90 mg Koffein enthält.

Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0,39685^t$$

$N(t)$... Koffeinmenge in Milligramm (mg) zur Zeit t

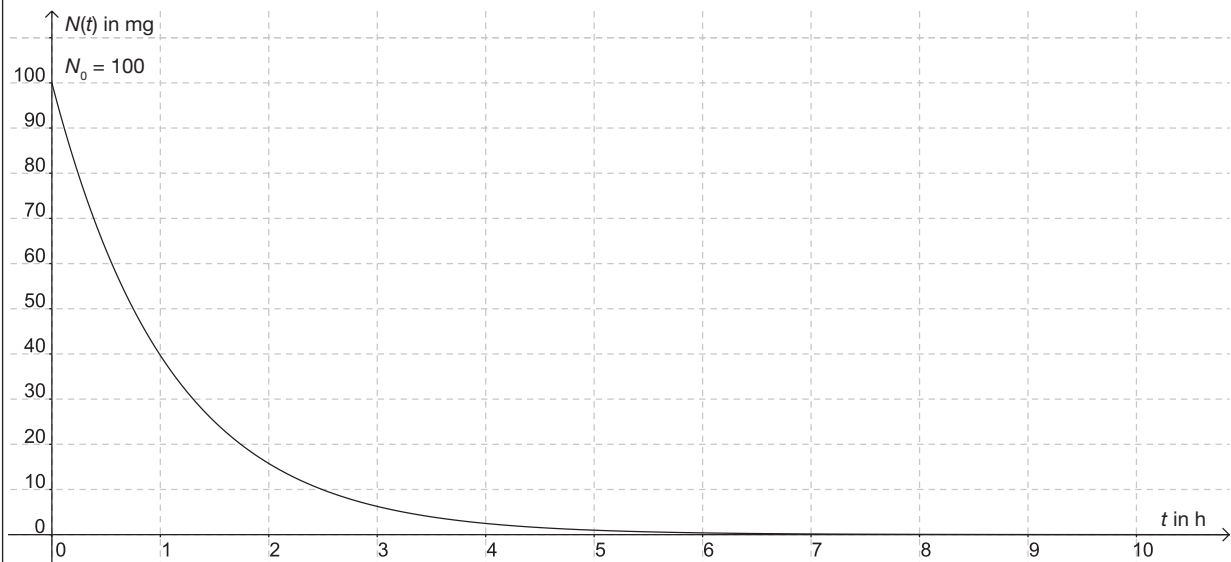
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$

t ... Zeit in Stunden (h)

– Berechnen Sie, wie viel Koffein Klara um 20 Uhr in ihrem Körper hat.

c) Die unten stehende Grafik zeigt den exponentiellen Abbau von Koffein im Körper einer Person.

- Skizzieren Sie in die Grafik den Verlauf der Exponentialfunktion für Sabine, die 100 mg Koffein zu sich nimmt und mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden abbaut.



d) Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0,39685^t$$

$N(t)$... Koffeinmenge in mg zur Zeit t

N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$

t ... Zeit in Stunden

Eine Menge von 500 mg Koffein kann z. B. Schlafstörungen, Unruhe und Nervosität hervorrufen.

- Berechnen Sie, wie viele ganze Dosen Energydrink (zu 200 ml mit 80 mg Koffein) Klara eine halbe Stunde vor dem Zubettgehen mindestens trinken müsste, sodass sie Schlafstörungen wegen des Koffeins hat.

Hinweis zur Aufgabe:

Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Halbwertszeit: 1,5 h

Exponentialfunktion mit Basis e :

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Umformung liefert $\lambda = 0,4621$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0,4621 \cdot t} = 80 \cdot e^{-0,4621 \cdot t}$$

$N(t)$... Koffeinmenge in mg zur Zeit t

t ... Zeit in Stunden

Exponentialfunktion mit Basis a :

$$0,5 = a^{1,5}$$

$$a = 0,62996$$

$$N(t) = 80 \cdot 0,62996^t$$

$N(t)$... Koffeinmenge in mg zur Zeit t

t ... Zeit in Stunden

b) 80 mg Koffein im Energydrink um 16 Uhr:

$$t = 4 \text{ h}$$

$$N_0 = 80 \text{ mg}$$

$$N(4) = 80 \cdot 0,39685^4 = 1,98424$$

90 mg Koffein in der Bitterschokolade um 17:30 Uhr:

$$t = 2,5 \text{ h}$$

$$N_0 = 90 \text{ mg}$$

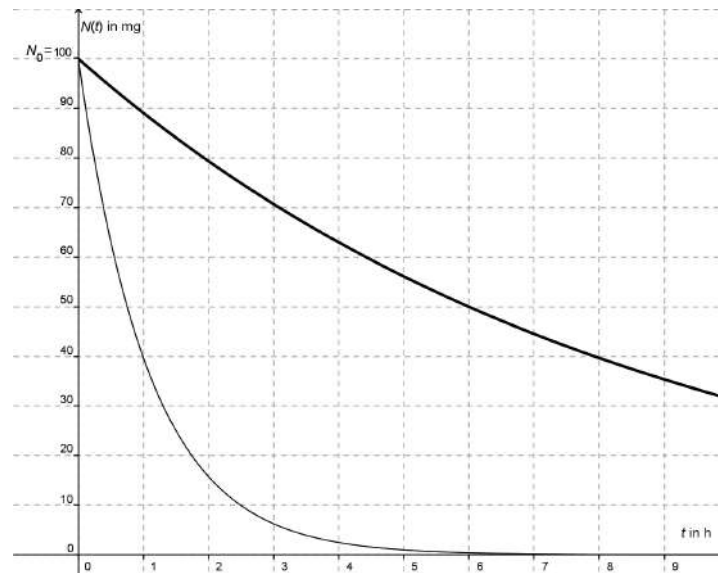
$$N(2,5) = 90 \cdot 0,39685^{2,5} = 8,92911$$

Gesamtkoffein im Körper um 20 Uhr: $1,98424 + 8,92911 = 10,91335$

Um 20 Uhr hat Klara 10,9 mg Koffein in ihrem Körper.

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls zulässig.

- c) Die Kurve muss VIEL flacher verlaufen – korrekt, wenn die Kurve im Punkt (0|100) beginnt und z. B. durch den Punkt (6|50) geht.



d) $500 = N_0 \cdot 0,39685^{0,5}$

$$N_0 = \frac{500}{0,39685^{0,5}} = 793,7$$

$$\frac{793,7}{80} = 9,921$$

Sie müsste ca. 10 Dosen Energydrink trinken.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das Auffinden des korrekten Modells (Funktionsgleichung)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Parameters und die korrekte und vollständige Angabe der Funktionsgleichung
- b) 1 × A: für die Berücksichtigung der unterschiedlichen Bezugszeitpunkte
1 × B: für die korrekte Berechnung
- c) 1 × A: wenn aus dem Graphen klar ersichtlich ist, dass die Abnahme pro Zeiteinheit geringer wird; der Graph muss durch den Punkt (6|50) gehen
- d) 1 × B: für die korrekte Berechnung von N_0
1 × B: für die korrekte Berechnung und das korrekte Runden der Dosenzahl