

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Bevölkerungsentwicklung der USA

Die nachstehende Tabelle beschreibt die Bevölkerungsentwicklung der USA im Zeitraum von 1900 bis 2000.

Jahr	Einwohnerzahl der USA in Mio.
1900	76
1920	106
1940	132
1960	179
1980	227
2000	281

Aufgabenstellung:

- a) Für den Zeitraum von 1900 bis 2000 soll die Bevölkerungsentwicklung der USA durch eine Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1900

$f(t)$... Einwohnerzahl der USA zur Zeit t in Mio.

$a, b \in \mathbb{R}^+$

- 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf. Verwenden Sie dafür die in der obigen Tabelle angegebenen Werte für 1900 und 1940. [0/1 P.]
- 2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent $f(100)$ von dem zugehörigen Wert in der Tabelle abweicht. [0/1 P.]

- b) Der belgische Mathematiker Pierre-François Verhulst hat im Jahr 1845 ein Modell zur Berechnung der Bevölkerungsentwicklung der USA erstellt.

Nach diesem Modell gilt:

$$B(t) = \frac{3,9}{0,01977 + 0,98023 \cdot e^{-0,03134 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1790

$B(t)$... Einwohnerzahl der USA zur Zeit t in Mio.

- 1) Ermitteln Sie, wie viele Jahre nach 1790 die momentane Änderungsrate der Einwohnerzahl in diesem Modell am größten war. [0/1 P.]
- 2) Ermitteln Sie, wie viele Jahre nach 1790 erstmals die momentane Änderungsrate der Einwohnerzahl in diesem Modell halb so groß wie jene im Jahr 1910 war. [0/1 P.]

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Bevölkerungsentwicklung der USA

a1) $a = f(0) = 76$

$$b = \sqrt[40]{\frac{132}{76}} = 1,0138...$$

$$f(t) = 76 \cdot 1,0138...^t$$

a2) $f(100) = 302,144...$

$$\frac{302,144... - 281}{281} = 0,0752...$$

Der Wert $f(100)$ weicht um rund 7,5 % von dem zugehörigen Wert in der Tabelle ab.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f .

a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

b1) $B''(t) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t = 124,5...$$

b2) $B'(t) = \frac{B'(120)}{2} = \frac{1,537...}{2}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$t_1 = 68,0... \quad (t_2 = 181,0...)$$

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln.

b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln.