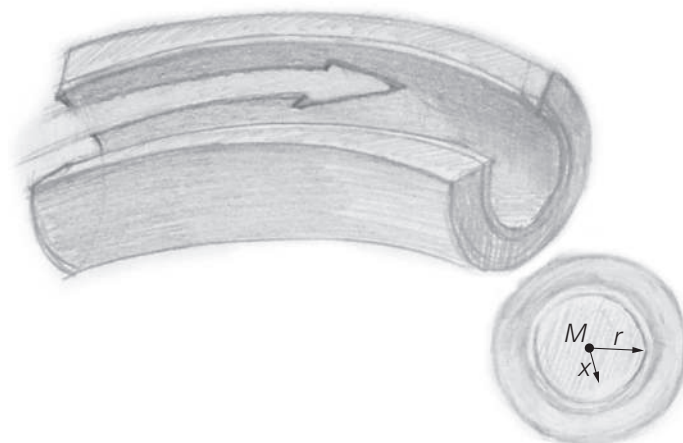


Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002

Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Ein Blutgefäß kann wie in der nachstehenden schematischen Darstellung mit kreisförmiger Querschnittsfläche angenommen werden.



Bildquelle: <http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php> [05.06.2013] (adaptiert).

Die Funktion v mit $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v des Blutteilchens und seinem Abstand x zum Mittelpunkt M der Querschnittsfläche des Blutgefäßes.

Dabei gilt:

M ... Mittelpunkt der Querschnittsfläche des Blutgefäßes

r ... Innenradius der Querschnittsfläche des Blutgefäßes (in mm)

v_m ... maximale Geschwindigkeit des Blutteilchens in M (in cm/s)

x ... Abstand des Blutteilchens von M (in mm)

$v(x)$... Geschwindigkeit des Blutteilchens bei x (in cm/s)

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für v an.

$$D = [\quad ; \quad)$$

b) Bei einem bestimmten Abstand x_1 des Blutteilchens von M beträgt seine Geschwindigkeit 75 % von v_m .

1) Berechnen Sie x_1 .

c) 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für $x(v)$ auf.

$$x(v) = \underline{\hspace{10cm}} \quad \text{mit } v \in (0; v_m]$$

2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von r denjenigen Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Geschwindigkeit des Blutteilchens auf die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit abnimmt.

d) 1) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v beim Abstand x an.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Vorzeichens der momentanen Änderungsrate von $v(x)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $D = [0; r)$

b1) $\frac{3}{4} \cdot v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2}\right) \Rightarrow x_1 = \frac{r}{2}$

c1) $x(v) = r \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$ mit $v \in (0; v_m]$

c2) $x\left(\frac{v_m}{2}\right) = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$

d1) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2 \cdot x}{r^2}$

d2) Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Blutteilchens bei steigendem Abstand vom Mittelpunkt abnimmt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Definitionsbereichs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.

c2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

d1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen momentanen Änderungsrate.

d2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung des Vorzeichens.