

Höhe der Schneedecke

Aufgabennummer: 2_FT001

Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die Höhe einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit ab. Bei gleichbleibender Temperatur kann die Höhe einer Schneedecke bis zur vollständigen Schneeschmelze durch die Funktion h modellhaft beschrieben werden. Dabei gilt:

$$h(t) = h_0 - a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad a > 0, t \geq 0$$

t ... Zeit in Tagen seit Beginn der Messung

h_0 ... Höhe der Schneedecke zu Beginn der Messung in cm

$h(t)$... Höhe der Schneedecke nach t Tagen in cm

Aufgabenstellung:

- a) Eine 20 cm hohe Schneedecke ist nach einem halben Tag nur mehr 18 cm hoch.
- 1) Berechnen Sie, wie viele Tage nach Beginn der Messung die Schneedecke vollständig geschmolzen ist.
 - 2) Beschreiben Sie, wie sich eine Erhöhung des Parameters a auf $h(t)$ auswirkt.
- b) In einem Alpendorf gilt für die Höhe der Schneedecke in einem bestimmten Zeitraum $h_0 = 40$ und $a = 5$.
- 1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Höhe der Schneedecke in diesem Alpendorf innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung.
 - 2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

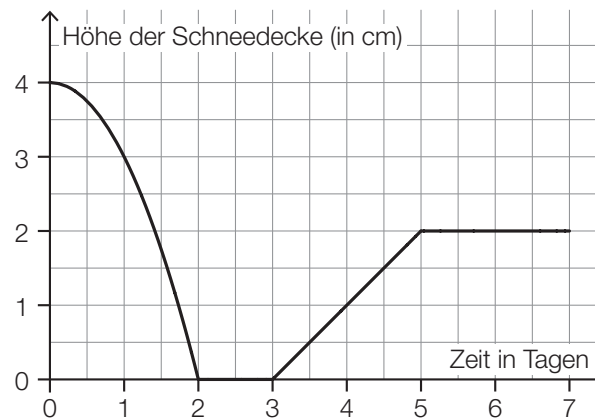
Die Berechnung der Höhe der Schneedecke ist nur in einem bestimmten Zeitintervall sinnvoll.

- 3) Ergänzen Sie die obere Intervallgrenze für dieses Zeitintervall.

Zeitintervall: $[0; \text{_____}]$

- 4) Interpretieren Sie $h'(0,5)$ im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe des konkreten Wertes.

- c) Nachstehend ist modellhaft die Entwicklung der Höhe der Schneedecke in Zentimetern innerhalb einer Woche in einer bestimmten Stadt abgebildet.



Gerhard behauptet, dass es sich beim Verlauf der Höhe der Schneedecke nicht um den Graphen einer Funktion handelt.

- 1) Begründen Sie, warum seine Behauptung nicht richtig ist.

Der Graph kann im Intervall $[3; 5]$ durch eine Funktion f mit $f(t) = k \cdot t + d$ beschrieben werden.

- 2) Geben Sie k und d an.

$k =$ _____

$d =$ _____

- 3) Beschreiben Sie unter Angabe konkreter Werte die Entwicklung der Höhe der Schneedecke im Intervall $[3; 7]$.

Lösungserwartung

a1) $18 = 20 - a \cdot 0,5^2 \Rightarrow a = 8$
 $20 - 8 \cdot t^2 = 0 \Rightarrow t = 1,58... \text{ Tage}$

a2) Eine Erhöhung des Parameters a bewirkt, dass die Höhe der Schneedecke schneller abnimmt.

b1) $h(t) = 40 - 5 \cdot t^2$
 $\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{20 - 40}{2} = -10$
Die mittlere Änderungsrate innerhalb der ersten beiden Tage beträgt -10 cm pro Tag .

b2) In den ersten beiden Tagen nimmt die Höhe der Schneedecke durchschnittlich um 10 cm pro Tag ab.

b3) Zeitintervall: $[0; \sqrt{8}]$

b4) $h'(0,5) = -5$
Zum Zeitpunkt $t = 0,5$ nimmt die Höhe der Schneedecke um 5 cm pro Tag ab.

c1) Der Graph beschreibt den Graphen einer Funktion, da jedem Zeitpunkt t eindeutig eine Schneehöhe $h(t)$ zugeordnet wird.

c2) $k = 1$
 $d = -3$

c3) Im Zeitintervall $[3; 5]$ nimmt die Höhe der Schneedecke von 0 cm auf 2 cm zu. Diese Höhe bleibt im Zeitintervall $[5; 7]$ konstant.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
- a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben.

- b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
- b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
- b3) Ein Punkt für das richtige Ergänzen.
- b4) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe des richtigen Wertes.

- c1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
- c2) Ein Punkt für das richtige Angeben der beiden Werte, ein halber Punkt für nur eine richtige Angabe.
- c3) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Entwicklung.