

Tee*

Aufgabennummer: 2_097

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, FA 2.1, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6

Tee ist weltweit eines der meistkonsumierten Getränke.

Aufgabenstellung:

- a) Modellhaft wird angenommen, dass der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um den gleichen Prozentsatz steigt.

Unter dieser Annahme gibt die Funktion f den jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich ab 2016 in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Jahren, $f(t)$ in Litern).

- 1) Geben Sie an, um welchen Funktionstyp es sich bei f handelt.

Der jährliche Pro-Kopf-Verbrauch von Tee lag in Österreich im Jahr 2016 bei 33 L. Der Anteil des Tees, der in Österreich im Jahr 2016 mittels Teebeuteln zubereitet wurde, beträgt 95 %.

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich steigt seit dem Jahr 2016 jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um 2 %.
- Der Anteil des Tees, der in Österreich jedes Jahr mittels Teebeuteln zubereitet wird, bleibt gleich.

- 2) Geben Sie an, wie viele Liter Tee im Jahr 2026 unter den oben angeführten Annahmen pro Kopf in Österreich mittels Teebeuteln zubereitet werden.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

- b) Der weltweit größte Teeproduzent ist China. Die nachstehende Tabelle gibt die Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen für einige Jahre im Zeitraum von 2011 bis 2017 an.

Jahr	2011	2013	2015	2017
Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen	1,55	1,85	2,23	2,55

Quelle: <https://de.statista.com/statistik/daten/studie/29847/umfrage/produktion-von-tee-nach-erzeugerlaendern-seit-2006/> [28.08.2018].

Die Menge des in China produzierten Tees soll in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2011 näherungsweise durch eine lineare Funktion g beschrieben werden (t in Jahren ab dem Jahr 2011, $g(t)$ in Millionen Tonnen).

- 1) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den Jahren 2011 und 2017 eine Funktionsgleichung für g an.

$g(t) =$ _____

In den Jahren 2013 und 2015 gibt es jeweils eine Abweichung zwischen den Funktionswerten von g und den Werten aus der obigen Tabelle.

- 2) Geben Sie an, in welchem der Jahre 2013 und 2015 der Betrag der absoluten Abweichung zwischen dem Funktionswert von g und dem zugehörigen Wert aus der obigen Tabelle größer ist. Ermitteln Sie für das angegebene Jahr ebenso den Betrag der absoluten Abweichung.

Jahr: _____

Betrag der absoluten Abweichung: _____ Millionen Tonnen

c) Heißer Tee kühlt bei niedrigerer Umgebungstemperatur ab.

Die Temperatur $T(t)$ des Tees t Minuten nach Beginn des Abkühlungsprozesses kann bei einer Anfangstemperatur T_0 und einer konstanten Umgebungstemperatur T_U durch die nachstehende Funktionsgleichung näherungsweise beschrieben werden.

$$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}^+ \quad (t \text{ in Minuten, } T_U \text{ in } ^\circ\text{C, } T_0 \text{ in } ^\circ\text{C, } T(t) \text{ in } ^\circ\text{C})$$

Eine Tasse mit Tee mit der Anfangstemperatur $T_0 = 90^\circ\text{C}$ wird in einen Raum mit einer konstanten Umgebungstemperatur von $T_U = 20^\circ\text{C}$ gestellt. Der Tee ist nach 10 Minuten auf eine Temperatur von 65°C abgekühlt.

1) Ermitteln Sie k .

Nehmen Sie an, dass der ermittelte Wert von k sowohl für den Abkühlungsprozess eines Tees mit einer Anfangstemperatur von 90°C als auch für den Abkühlungsprozess eines anderen Tees mit einer Anfangstemperatur von 70°C gilt.

2) Geben Sie an, bei welcher Umgebungstemperatur T_U beide Tees in der gleichen Zeit auf die Hälfte des Wertes ihrer jeweiligen Anfangstemperatur (in $^\circ\text{C}$) abkühlen.

$$T_U = \underline{\hspace{10cm}} ^\circ\text{C}$$

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) Exponentialfunktion

a2) $33 \cdot 1,02^{10} \cdot 0,95 = 38,21\dots$

In Österreich werden im Jahr 2026 pro Kopf ca. 38,2 L Tee mittels Teebeuteln zubereitet.

b) Lösungserwartung:

b1) $g(0) = 1,55, g(6) = 2,55$

$$g(t) = \frac{1}{6} \cdot t + 1,55$$

b2) Jahr: 2013

Betrag der absoluten Abweichung: 0,03 Millionen Tonnen

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$$65 = 70 \cdot e^{-k \cdot 10} + 20$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{45}{70}\right)}{-10} = 0,0441\dots$$

$$k \approx 0,044 \text{ min}^{-1}$$

c2) mögliche Vorgehensweise:

$$45 = (90 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$$

$$35 = (70 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$$

$$\Rightarrow \frac{45 - T_U}{90 - T_U} = \frac{35 - T_U}{70 - T_U}$$

$$\Rightarrow T_U = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Funktionstyps.
- a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „L“ nicht angegeben sein muss.
- b1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
- b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Jahres und der richtigen Lösung.
- c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „min⁻¹“ nicht angegeben sein muss.
- c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.