

## Tennis\*

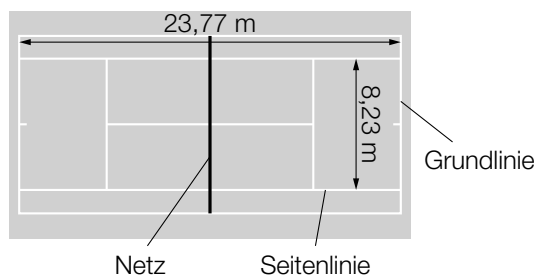
Aufgabennummer: 2\_058

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 4.3, WS 1.1

Tennis ist ein Rückschlagspiel zwischen zwei oder vier Personen, bei dem ein Tennisball über ein Netz geschlagen werden muss. Das Spielfeld ist rechteckig und wird durch ein Netz in zwei Hälften geteilt (siehe Abbildung 1). Für ein Spiel zwischen zwei Personen ist der Platz 23,77 m lang und 8,23 m breit. Das Spielfeld wird durch die Grundlinien und die Seitenlinien begrenzt. Das Netz weist eine maximale Höhe von 1,07 m auf.

Abbildung 1:



### Aufgabenstellung:

a) Die Funktion  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = -0,0007 \cdot x^3 + 0,005 \cdot x^2 + 0,2 \cdot x + 0,4$  beschreibt eine Bahnkurve eines Tennisballs bis zu derjenigen Stelle, an der der Tennisball erstmals den Boden berührt. Dabei gibt  $x$  die waagrechte Entfernung des Tennisballs vom Abschlagpunkt und  $f(x)$  die Flughöhe des Tennisballs über dem Boden an ( $x$  und  $f(x)$  in m). Die Flugbahn des Tennisballs startet zwischen den Seitenlinien an der Grundlinie und die Ebene, in der die Flugbahn liegt, verläuft parallel zur Seitenlinie des Tennisfelds.

- 1) Geben Sie an, in welcher waagrechten Entfernung vom Abschlagpunkt der Tennisball seine maximale Höhe erreicht.

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: \_\_\_\_\_ m

- 2) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Tennisball im gegnerischen Spielfeld oder hinter der Grundlinie landet.

- b) Fällt ein Tennisball lotrecht (ohne Drehung) auf den Boden, so springt er wieder lotrecht zurück. Der Restitutionskoeffizient  $r$  ist ein Maß für die Sprungfähigkeit des Tennisballs.

Es gilt:  $r = \frac{v_2}{v_1}$ , wobei  $v_1$  der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs vor und  $v_2$  der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs nach dem Aufprall ist.

Die Differenz der vertikalen Geschwindigkeiten unmittelbar vor und nach dem Aufprall ist aufgrund der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Tennisballs definiert durch:  
 $\Delta v = v_2 - (-v_1)$ .

- 1) Geben Sie  $\Delta v$  in Abhängigkeit von  $v_1$  und  $r$  an.

$$\Delta v = \underline{\hspace{10cm}}$$

Ein Tennisball trifft mit  $v_1 = 4,4 \text{ m/s}$  lotrecht auf dem Boden auf. Der Restitutionskoeffizient beträgt für diesen Tennisball  $r = 0,6$ . Die Kontaktzeit mit dem Boden beträgt  $0,01 \text{ s}$ .

- 2) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung  $a$  (in  $\text{m/s}^2$ ) des Tennisballs in vertikaler Richtung beim Aufprall (während der Kontaktzeit).

$$a = \underline{\hspace{10cm}} \text{ m/s}^2$$

- c) Bei einem Fünf-Satz-Tennismatch gewinnt ein Spieler, sobald er drei Sätze gewonnen hat. Für einen Satzgewinn müssen in der Regel sechs Games gewonnen werden, wobei es für jedes gewonnene Game einen Punkt gibt.

Für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten  $p$  für ein gewonnenes Game wurden die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten  $m$  für einen Matchgewinn bei einem Fünf-Satz-Match ermittelt. In der nachstehenden Tabelle sind diese Wahrscheinlichkeiten angeführt.

| $p$  | $m$    |
|------|--------|
| 0,5  | 0,5    |
| 0,51 | 0,6302 |
| 0,55 | 0,9512 |
| 0,6  | 0,9995 |
| 0,7  | 1,000  |

Für ein bestimmtes Fünf-Satz-Match gilt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler  $A$  ein Game gewinnt, ist um 2 Prozentpunkte höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegenspieler  $B$  ein Game gewinnt.

- 1) Geben Sie an, um wie viel Prozentpunkte die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler  $A$  dieses Fünf-Satz-Match gewinnt, höher ist als jene für seinen Gegenspieler  $B$ .

Gegenüber einem anderen, schwächeren Gegenspieler  $C$  hat Spieler  $A$  einen Vorteil von 10 Prozentpunkten, ein Game zu gewinnen.

- 2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler  $A$  das Fünf-Satz-Match gegen Gegenspieler  $C$  gewinnt, um 50,94 Prozent höher ist als beim Fünf-Satz-Match gegen  $B$ .

## Lösungserwartung

### a) Lösungserwartung:

#### a1) mögliche Vorgehensweise:

$$f'(x) = 0$$

$$-0,0021 \cdot x^2 + 0,01 \cdot x + 0,2 = 0 \Rightarrow x_1 = 12,42... \quad (x_2 = -7,66...)$$

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

#### a2) $f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 21,597... \quad (x_2 = -2,15..., x_3 = -12,30...)$

Die einzige positive Nullstelle von  $f$  ist  $x_1 \approx 21,6$ .

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

### b) Lösungserwartung:

#### b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

#### b2) mögliche Vorgehensweise:

$$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4,4 \cdot (1 + 0,6) = 7,04$$

$$a = 7,04 : 0,01 = 704$$

$$a = 704 \text{ m/s}^2$$

### c) Lösungserwartung:

#### c1) $0,6302 - 0,3698 = 0,2604$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

#### c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Spieler C gewinnt: 0,9512

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Spieler B gewinnt:  
0,6302

$$\frac{0,9512}{0,6302} = 1,50936... \approx 1,5094$$

$\Rightarrow$  0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

## Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- a2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
- b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall für  $a$ : [700 m/s<sup>2</sup>; 710 m/s<sup>2</sup>]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.  
Toleranzintervall: [26; 26,1]
- c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.