

Einsatz von Antibiotika*

Aufgabennummer: 2_057

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 2.4, FA 3.4, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3

Die Entwicklung einer Bakterienpopulation kann durch die Zufuhr von Antibiotika beeinflusst werden, was letztlich durch die Giftwirkung von Antibiotika zum Aussterben der Bakterienpopulation führen soll.

In bestimmten Fällen kann diese Entwicklung näherungsweise durch eine Funktion $B: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben werden:

$$B(t) = b \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2} \quad \text{mit } b, c, k \in \mathbb{R}^+$$

t ... Zeit in Stunden

$B(t)$... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt t

b ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt $t = 0$

k ... Konstante

c ... Parameter für die Giftwirkung

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion B hat genau eine positive Extremstelle t_1 .

1) Bestimmen Sie t_1 in Abhängigkeit von k und c .

2) Geben Sie an, welche Auswirkungen eine Vergrößerung von c bei gegebenem k auf die Lage der Extremstelle t_1 der Funktion B hat.

b) Die Funktion $B_1: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $B_1(t) = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer bestimmten Bakterienpopulation in Millionen in Abhängigkeit von der Zeit t .

Zum Zeitpunkt $t_2 \neq 0$ erreicht die Bakterienpopulation ihre ursprüngliche Anzahl von 20 Millionen.

1) Geben Sie t_2 an.

2) Deuten Sie $B_1'(t_2)$ im vorliegenden Kontext unter Verwendung der entsprechenden Einheit.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

- c) Die Funktion $B_2: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $B_2(t) = 5 \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer anderen Bakterienpopulation in Millionen, die zum Zeitpunkt $t = 4$ ihr Maximum aufweist.
- 1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_3 , zu dem die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation stattfindet.
 - 2) Geben Sie an, wie viel Prozent der maximalen Anzahl an Bakterien zum Zeitpunkt t_3 noch vorhanden sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$$B'(t) = b \cdot (k - c \cdot t) \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$$

$$B'(t_1) = 0$$

$$k - c \cdot t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{k}{c}$$

a2) mögliche Beschreibung:

Die Extremstelle t_1 wird zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$20 = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2}$$

$$1 = e^{2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2}$$

$$0 = 2 \cdot t - 0,45 \cdot t^2 \Rightarrow t_2 = 4,4 \text{ h}$$

b2) mögliche Deutung:

$B'_1(t_2)$ gibt die (momentane) Abnahmegeschwindigkeit in Millionen Bakterien pro Stunde zum Zeitpunkt t_2 an.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$$B_2''(t) = 5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t + 15) \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$$

$$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0 \Rightarrow t_1 = 3; t_2 = 5$$

Es gilt:

$$B_2'(3) > 0$$

und

$$B_2'(5) < 0$$

(und $B_2'''(5) \neq 0$)Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ findet die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation statt.

$$\text{c2) } \frac{B_2(5)}{B_2(4)} = 0,60653... \approx 0,6065$$

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ sind noch ca. 60,65 % der maximalen Anzahl an Bakterien vorhanden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.

Toleranzintervall: [4,4 h; 4,5 h]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall: [0,60; 0,61]