

Angebot und Nachfrage*

Aufgabennummer: 2_056

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, AN 1.3, AN 3.3

Ein Aufeinandertreffen von Anbietern und Nachfragern wird in der Wirtschaftswissenschaft als *Markt* bezeichnet. Gibt es auf einem Markt genau einen Anbieter für eine Ware, so ist dieser in der Lage, den Preis der Ware zu bestimmen, wobei die nachgefragte und damit absetzbare Menge der Ware vom Preis abhängt. Um bei gewissen Problemstellungen mit der Kosten-, Erlös- und/oder Gewinnfunktion arbeiten zu können, wird häufig der Preis als sogenannte Preisfunktion der Nachfrage p_N in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x der Ware angegeben.

Die nachstehenden Aufgaben sind für die Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = 36 - x^2$ zu bearbeiten. Dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $p_N(x)$ in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

Aufgabenstellung:

- a) Alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, für die $p_N(x) \geq 0$ gilt, liegen im Intervall $[x_0; x_n]$.
- 1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion p_N in diesem Intervall $[x_0; x_n]$ und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf den Verkaufspreis.
 - 2) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass für alle x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ aus dem Intervall $(x_0; x_n)$ die Ungleichung $p_N(x_1) > p_N(x_2)$ gilt.
- b) Der Erlös durch die verkaufte Menge der Ware wird durch die Funktion E mit $E(x) = x \cdot p_N(x)$ beschrieben. Der Grenzerlös $E'(x)$ bei einer bestimmten Absatzmenge x beschreibt näherungsweise die Änderung des Erlöses bezogen auf eine zusätzlich abgesetzte Mengeneinheit.
- 1) Ermitteln Sie diejenige Menge x_E , bei der der Erlös maximal ist.
 - 2) Begründen Sie, warum der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x mit $0 < x < x_E$ positiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

- c) Gibt es auf einem Markt viele Anbieter einer Ware, dann werden diese in der Regel bei steigendem Preis auch eine größere Menge der Ware anbieten. Dieser Zusammenhang kann als Preisfunktion des Angebots p_A in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x beschrieben werden (mit x in ME und $p_A(x)$ in GE/ME).

Diejenige Menge der Ware, bei der der Preis für die angebotene Menge und der Preis für die nachgefragte Menge gleich groß sind, nennt man Gleichgewichtsmenge x_G . Den zugehörigen Preis nennt man Gleichgewichtspreis.

- 1) Ermitteln Sie für die gegebene Funktion p_N und die Funktion p_A mit $p_A(x) = 4 \cdot x + 4$ die Gleichgewichtsmenge x_G und den zugehörigen Gleichgewichtspreis.

Für eine Ware wird ein Preis p_M festgelegt, der um 2 GE/ME größer als der ermittelte Gleichgewichtspreis ist.

- 2) Bestimmen Sie die angebotene und die nachgefragte Menge für diesen Preis p_M und vergleichen Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die verkaufte Menge der Ware.

Lösungserwartung

a1) Intervall: $x_0 = 0$ ME, $x_n = 6$ ME $\Rightarrow$ $[0 \text{ ME}; 6 \text{ ME}]$

mittlere Änderungsrate:
$$\frac{p_N(6) - p_N(0)}{6 - 0} = \frac{0 - 36}{6} = -6$$

mögliche Deutung:

Pro zusätzlicher Mengeneinheit, die verkauft werden soll, nimmt der Verkaufspreis im Intervall $[0; 6]$ durchschnittlich um 6 GE/ME ab.

a2) mögliche Vorgehensweise:

Die angegebene Ungleichung besagt, dass die Funktion p_N im angegebenen Definitionsbereich streng monoton fallend ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn $p'_N(x)$ negativ (oder für einzelne Stellen null) für alle $x \in (0; 6)$ ist.

Überprüfung: $p'_N(x) = -2 \cdot x$ und es gilt: $-2 \cdot x < 0$ für alle $x \in (0; 6)$

b1) $E(x) = x \cdot p_N(x) = -x^3 + 36 \cdot x$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow -3 \cdot x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{12} \quad (x_2 = -\sqrt{12}) \Rightarrow x_E \approx 3,46 \text{ ME}$$

b2) mögliche Begründung:

Die Funktion E' ist eine nach unten offene Parabel, die an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert $E'(0) = 36$ hat und an der Stelle $x_E = \sqrt{12}$ eine Nullstelle hat. Also sind sämtliche Funktionswerte von E' (und damit der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x) im Intervall $(0; x_E)$ positiv.

c1) $p_A(x) = p_N(x) \Rightarrow 4 \cdot x + 4 = -x^2 + 36 \Rightarrow x_G = 4 \text{ ME}$

$$\text{Gleichgewichtspreis} = p_A(4) = p_N(4) = 20$$

Bei der Gleichgewichtsmenge von $x_G = 4$ ME beträgt der zugehörige Gleichgewichtspreis 20 GE/ME.

c2) $p_M = 22$ GE/ME

$$\text{angebotene Menge: } 22 = 4 \cdot x + 4 \Rightarrow x = 4,5 \text{ ME}$$

$$\text{nachgefragte Menge: } 22 = -x^2 + 36 \Rightarrow x_1 = \sqrt{14} \quad (x_2 = -\sqrt{14}) \Rightarrow x \approx 3,74 \text{ ME}$$

möglicher Vergleich:

Die nachgefragte Menge ist kleiner als die angebotene Menge, d. h., die Ware wird nicht zur Gänze verkauft.

Lösungsschlüssel

- a1) Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.
- a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis mithilfe der Differenzialrechnung.

- b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung. Andere richtige Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

- c1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen, und für einen richtigen Vergleich.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.