

Kostenfunktion*

Aufgabennummer: 2_052

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, FA 4.1, FA 4.3, AN 3.3

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7,5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0,2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für dieses Produkt den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall [100 ME; 200 ME].

2) Ermitteln Sie, ab welcher Produktionsmenge die Grenzkosten steigen.

b) Die Produktionsmenge x_{opt} , für die die Stückkostenfunktion $\bar{K}$ mit $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ minimal ist, heißt Betriebsoptimum zur Kostenfunktion K .

1) Ermitteln Sie das Betriebsoptimum x_{opt} .

Der Hersteller berechnet die Produktionskosten für die Produktionsmenge x_{opt} . Dabei stellt er fest, dass diese Kosten 65 % seines für die Produktion dieses Produkts verfügbaren Kapitals ausmachen.

2) Berechnen Sie das dem Hersteller für die Produktion dieses Produkts zur Verfügung stehende Kapital.

- c) Für den Verkaufspreis p kann der Erlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch eine lineare Funktion E mit $E(x) = p \cdot x$ beschrieben werden ($E(x)$ in GE, x in ME, p in GE/ME). Dabei wird vorausgesetzt, dass gleich viele Mengeneinheiten verkauft wie produziert werden.

- 1) Bestimmen Sie p so, dass der maximale Gewinn bei einem Verkauf von 600 ME erzielt wird.

Die maximal mögliche Produktionsmenge beträgt 650 ME.

- 2) Bestimmen Sie den Gewinnbereich (also denjenigen Produktionsbereich, in dem der Hersteller Gewinn erzielt).

- d) Für ein weiteres Produkt dieses Herstellers sind in der nachstehenden Tabelle die Produktionskosten (in GE) für verschiedene Produktionsmengen (in ME) dargestellt.

Produktionsmenge (in ME)	50	100	250		500
Produktionskosten (in GE)	197	253	308	380	700

Diese Produktionskosten können durch eine Polynomfunktion dritten Grades K_1 mit $K_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

- 1) Bestimmen Sie die Werte von a , b , c und d .
- 2) Berechnen Sie die in der obigen Tabelle fehlende Produktionsmenge.

Lösungserwartung

a1) $\frac{K(200) - K(100)}{200 - 100} = \frac{66,5 - 59,35}{100} = 0,0715 \text{ GE/ME}$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$$K''(x) = 4,8 \cdot 10^{-6} \cdot x - 1,5 \cdot 10^{-3}$$

$$K''(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 312,5 \text{ ME}$$

Ab der Produktionsmenge von 312,5 ME steigen die Grenzkosten.

b1) mögliche Vorgehensweise:

$$\bar{K}(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 7,5 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0,2405 + \frac{42}{x}$$

$$\bar{K}'(x) = 16 \cdot 10^{-7} \cdot x - 7,5 \cdot 10^{-4} - \frac{42}{x^2}$$

$$\bar{K}'(x) = 0 \Rightarrow x_{\text{opt}} \approx 554,2 \text{ ME}$$

$$(\bar{K}''(x) > 0 \Rightarrow \text{Es liegt ein Minimum vor.})$$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$K(554,2) \approx 81,1 \text{ GE} \Rightarrow 81,1 : 0,65 \approx 125$$

Dem Hersteller stehen für die Produktion dieses Produkts ca. 125 GE zur Verfügung.

c1) mögliche Vorgehensweise:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G'(x) = p - K'(x)$$

$$G'(600) = p - K'(600) = 0 \Rightarrow p = 0,2045 \text{ GE/ME}$$

c2) mögliche Vorgehensweise:

$$G(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 335 \quad (x_2 \approx 799, \quad x_3 \approx -196)$$

Gewinnbereich: [335 ME; 650 ME]

d1) $a \approx 1,5 \cdot 10^{-5}$

$$b \approx -9,8 \cdot 10^{-3}$$

$$c \approx 2,324$$

$$d \approx 103$$

d2) $K_1(x) = 380 \Rightarrow x \approx 365 \text{ ME}$

Lösungsschlüssel

- a1)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,05 GE/ME; 0,10 GE/ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- a2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [312 ME; 313 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b1)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss und eine Überprüfung, dass es sich um ein Minimum handelt, nicht durchgeführt werden muss.
Toleranzintervall: [554 ME; 555 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [120 GE; 130 GE]
- c1)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,20; 0,21]
- c2)** Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Gewinnbereichs, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall für x_1 : [325; 345]
- d1)** Ein Punkt für die richtigen Werte von a , b , c und d .
Toleranzintervall für a : [$1 \cdot 10^{-5}$; $2 \cdot 10^{-5}$]
Toleranzintervall für b : [$-1 \cdot 10^{-2}$; $-9 \cdot 10^{-3}$]
Toleranzintervall für c : [2; 2,5]
Toleranzintervall für d : [100; 105]
- d2)** Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung je nach Rundung der Koeffizienten a , b , c und d variieren kann.