

Körper mit rechteckigen Querschnittsflächen*

Aufgabennummer: 2_050

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 4.1, FA 2.1, FA 4.1, FA 4.3, AN 1.3, AN 4.3

Die nachstehenden Abbildungen 1 und 2 stellen einen Körper mit ebenen Seitenflächen im Schrägriss bzw. eine Schnittfläche dar.

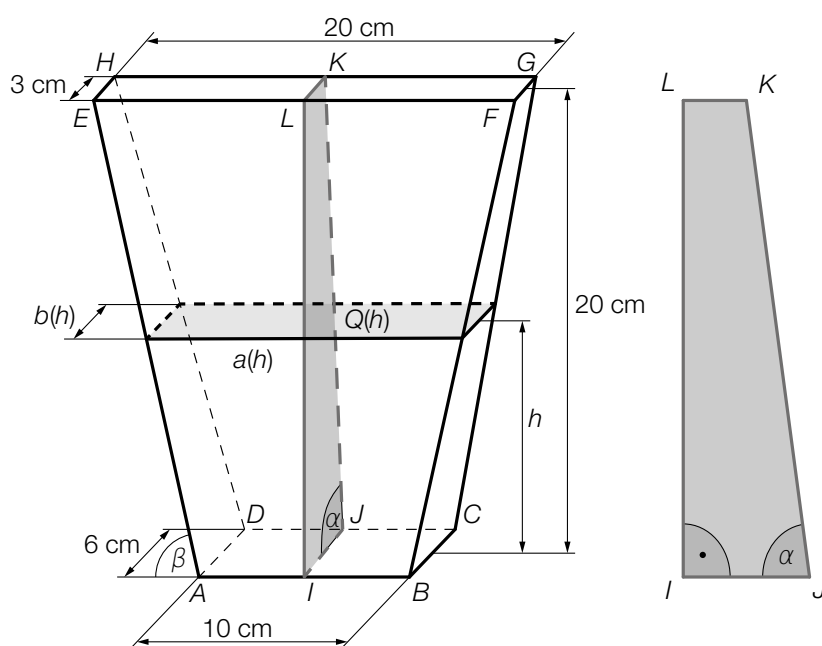


Abbildung 1: Schrägriss des Körpers

Abbildung 2: Schnittfläche IJKL

Die vordere Seitenfläche $ABFE$ steht normal auf die horizontale Grundfläche $ABCD$ und auf die horizontale Deckfläche $EFGH$, während die hintere Seitenfläche $DCGH$ zur Grundfläche unter dem Winkel α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) geneigt ist.

Die beiden Seitenflächen $ADHE$ und $BCGF$ weisen gegenüber der Grundfläche den gleichen Neigungswinkel β (mit $\beta \approx 76^\circ$) auf.

Die horizontalen Querschnittsflächen des Körpers sind in jeder Höhe rechteckig. Die Längen $a(h)$ und die Breiten $b(h)$ dieser Rechtecke ändern sich linear in Abhängigkeit von der Höhe h . Die Grundfläche hat eine Länge von 10 cm und eine Breite von 6 cm, die Deckfläche hat eine Länge von 20 cm und eine Breite von 3 cm. Die Höhe des Körpers beträgt 20 cm.

Aufgabenstellung:

- a) Die Funktion $Q: [0; 20] \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt die Größe der Querschnittsfläche $Q(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h (mit $Q(h)$ in cm^2 , h in cm).

Es gilt: $Q(h) = s \cdot h^2 + 1,5 \cdot h + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von s und t !

Berechnen Sie das Volumen des Körpers und geben Sie das Ergebnis inklusive Einheit an!

- b) Die lokale Änderungsrate der Breite $b(h)$ nimmt für jedes $h \in [0; 20]$ einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an.

Berechnen Sie c !

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen c und α mithilfe einer Gleichung!

- c) Die Funktion a beschreibt die Länge $a(h)$ in der Höhe h mit $a(h)$ und h in cm .

Geben Sie eine Funktionsgleichung von a an!

Ändert man den Winkel β auf 45° und lässt die Länge der Grundlinie AB und die Körperhöhe unverändert, so erhält man eine neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 , bei der die Funktion a_1 mit $a_1(h) = 2 \cdot h + 10$ die Länge $a_1(h)$ in der Höhe h beschreibt ($a_1(h)$ und h in cm).

Geben Sie das Verhältnis $\int_0^{20} a_1(h) dh : \int_0^{20} a(h) dh$ an und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 und die ursprüngliche vordere Seitenfläche $ABFE$!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

$$Q(0) = 60 \Rightarrow t = 60$$

$$Q(20) = 60 \Rightarrow 60 = 400 \cdot s + 90 \Rightarrow s = -\frac{3}{40}$$

$$V = \int_0^{20} Q(h) dh = -\frac{1}{40} \cdot 20^3 + 0,75 \cdot 20^2 + 60 \cdot 20 = 1\,300 \text{ cm}^3$$

b) $c = \frac{3-6}{20} = -\frac{3}{20}$

$$\tan(\alpha) = -\frac{1}{c}$$

c) mögliche Vorgehensweise:

$$a(h) = \frac{a(20) - a(0)}{20} \cdot h + a(0)$$

$$a(h) = \frac{1}{2} \cdot h + 10$$

mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^{20} a_1(h) dh = \int_0^{20} (2 \cdot h + 10) dh = 600$$

$$\int_0^{20} a(h) dh = \int_0^{20} \left(\frac{1}{2} \cdot h + 10 \right) dh = 300$$

$$\int_0^{20} a_1(h) dh : \int_0^{20} a(h) dh = 600 : 300 = 2 : 1$$

Das Verhältnis des Flächeninhalts der neuen Seitenwand ABF_1E_1 zum Flächeninhalt der ursprünglichen Seitenwand $ABFE$ ist 2 : 1.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für s : $[-0,08; -0,07]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung unter Angabe einer richtigen Einheit.
Toleranzintervall: $[1\,280\text{ cm}^3; 1\,320\text{ cm}^3]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: $[-0,2; -0,1]$
- Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- c) – Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Interpretation.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.