

Exponentialfunktion und lineare Funktion*

Aufgabennummer: 2_049

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 2.2, FA 2.3, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

- a) Gegeben ist eine lineare Funktion $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$.

Geben Sie alle $k \in \mathbb{R}$ an, für die die Graphen von f und g_1 einander in genau zwei Punkten schneiden!

Für ein solches k beschreibt die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = g_1(x) - f(x)$ die Differenz von g_1 und f . Für eine Stelle x_0 zwischen den beiden Schnittpunkten der Graphen gilt die Beziehung $h'(x_0) = 0$.

Bestimmen Sie x_0 in Abhängigkeit von k !

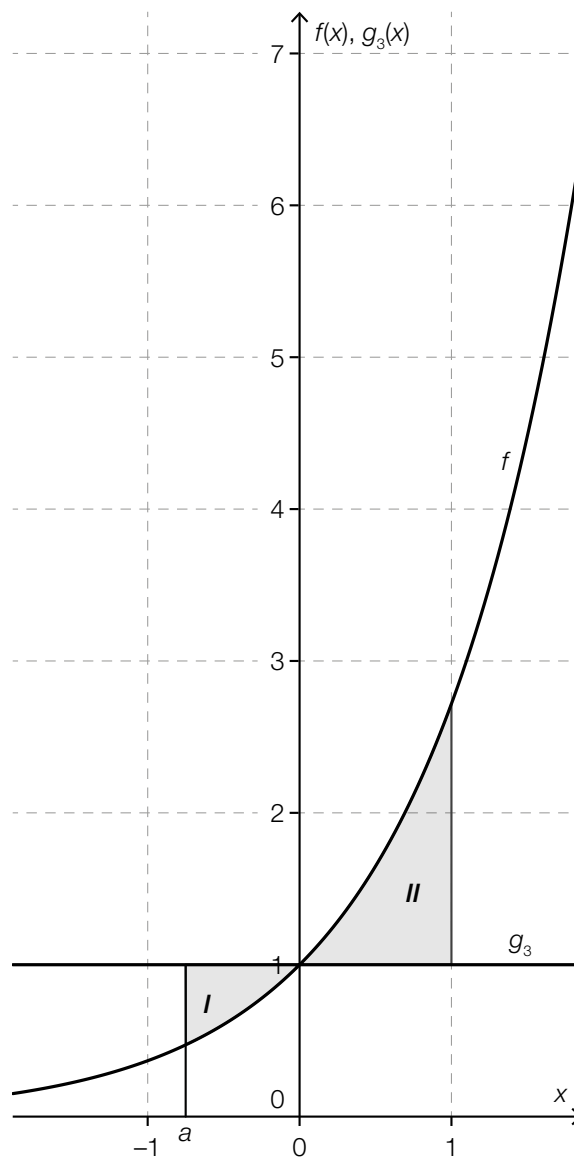
- b) Der Graph einer linearen Funktion $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = 4 \cdot x + d$ und $d \in \mathbb{R}$ ist eine Tangente an den Graphen von f .

Geben Sie die Koordinaten des Berührungspunkts B der beiden Graphen an!

Geben Sie den Wert von d an!

c) Gegeben ist die Funktion $g_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g_3(x) = 1$.

Die von den beiden Graphen von g_3 und f im Intervall $[a; 0]$ (mit $a \in \mathbb{R}$ und $a < 0$) eingeschlossene Fläche **I** hat den Flächeninhalt A_1 . Die von den beiden Graphen von f und g_3 im Intervall $[0; 1]$ eingeschlossene Fläche **II** hat den Flächeninhalt A_2 .



Berechnen Sie den Flächeninhalt A_2 !

Drücken Sie das bestimmte Integral $\int_a^1 (f(x) - g_3(x)) dx$ durch die Flächeninhalte A_1 und A_2 aus!

Lösungserwartung

a) $k \in \mathbb{R}^+$

mögliche Vorgehensweise:

$$h(x) = g_1(x) - f(x) = k \cdot x + 2 - e^x$$

$$h'(x) = k - e^x$$

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow k - e^{x_0} = 0 \Rightarrow x_0 = \ln(k)$$

b) mögliche Vorgehensweise:

$$B = (x_B | f(x_B))$$

$$f'(x_B) = 4$$

$$e^{x_B} = 4 \Rightarrow x_B = \ln(4)$$

$$f(x_B) = e^{\ln(4)} = 4$$

$$B = (\ln(4) | 4)$$

$$4 = 4 \cdot \ln(4) + d \Rightarrow d = 4 - 4 \cdot \ln(4) \approx -1,545$$

c) $A_3 = \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - 2$

$$\int_a^1 (f(x) - g_3(x)) dx = A_2 - A_1$$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Koordinaten.
Toleranzintervall für x_B : $[1,3; 1,4]$
Toleranzintervall für $f(x_B)$: $[3,6; 4,1]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für d : $[-2,0; -1,1]$
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei bereits die Angabe $\int_0^1 (e^x - 1) dx$ als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall: $[0,70; 0,72]$
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.