

Wings for Life World Run*

Aufgabennummer: 2_048

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 5.3, AN 1.1, AN 4.3, WS 1.1

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom *Catcher-Car* überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das *Catcher-Car* zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des *Catcher-Cars* wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

- a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Die Laufzeit t der Person hängt von der Geschwindigkeit v der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem t bei Kenntnis von v berechnet werden kann (mit t in h und v in km/h)!

$t =$ _____

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. _____ %.

- b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$$v(t) = 12 \cdot 0,7^{t-1} \text{ mit } t \text{ in h und } v(t) \text{ in km/h}$$

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t) dt$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Diese Person wird während der 16-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: ____ : ____ UTC

- c) Ein Läufer wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass dieser Läufer nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis er vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft.“

Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit $\bar{v}$!

$\bar{v} =$ _____ km/h

Lösungserwartung

a) möglicher Term:

$$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0,5) \Rightarrow t = \frac{7,5}{15 - v}$$

mögliche Vorgehensweise:

$$s = v \cdot t$$

$$s = v \cdot \frac{7,5}{15 - v}$$

$$v = 9 \text{ km/h: } s = 11,25 \text{ km}$$

$$v = 9,9 \text{ km/h: } s \approx 14,559 \text{ km}$$

$$\frac{14,559}{11,25} \approx 1,294$$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

b) mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$$12 + \int_1^b v(t) dt = 15 + 16 \cdot (b - 1,5) \Rightarrow b \approx 1,878$$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

c) Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:

Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$$t = 3,5 + \frac{3,72}{20} = 3,686 \text{ h}$$

$$\bar{v} = \frac{51,72}{3,686} \approx 14,03 \text{ km/h}$$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für eine richtige Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- c) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.