

Zuverlässigkeit eines Systems*

Aufgabennummer: 2_045

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1, AN 3.3, WS 2.3

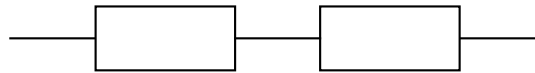
Ein System ist im Folgenden eine Maschine, die aus mehreren Bauteilen besteht. Jedes Bauteil dieses Systems kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit korrekt funktionieren oder ausfallen. Wenn einzelne Bauteile eines Systems ausfallen, hängt es von der Bauart des Systems ab, ob das gesamte System weiter funktioniert oder ob es ausfällt.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Bauteils* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. Das gilt jeweils für eine bestimmte Zeitdauer und unter bestimmten Bedingungen.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. (Es wird modellhaft angenommen, dass Ausfälle von Bauteilen voneinander unabhängig sind.) Die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit heißt Ausfallwahrscheinlichkeit.

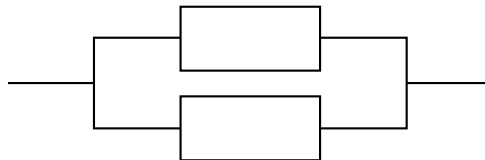
Man unterscheidet zwei einfache Typen von Systemen:

- Seriensysteme:



Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren.

- Parallelsysteme:

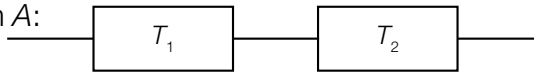


Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist das System A:



Das Bauteil T_1 hat die Zuverlässigkeit p_1 und das Bauteil T_2 hat die Zuverlässigkeit p_2 .

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems A als Funktion z_A von p_1 und p_2 .

Geben Sie $z_A(p_1, p_2)$ an!

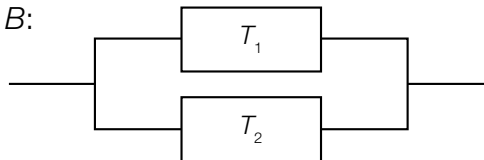
$$z_A(p_1, p_2) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Bei einem anderen System gleicher Bauart haben die Bauteile jeweils die gleiche Zuverlässigkeit $p_1 = p_2 = 0,7$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems soll auf ein Viertel der aktuellen Ausfallwahrscheinlichkeit gesenkt werden.

Geben Sie an, welchen Wert die Zuverlässigkeit p_{neu} (für jedes der beiden Bauteile) annehmen muss!

$$p_{\text{neu}} = \underline{\hspace{10cm}}$$

b) Gegeben ist das System B:



Die beiden Bauteile T_1 und T_2 haben jeweils die gleiche Zuverlässigkeit p .

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems B als Funktion z_B von p .

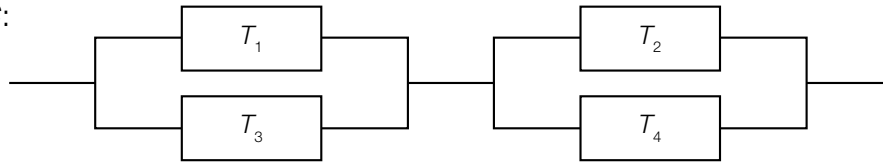
Geben Sie $z_B(p)$ an!

$$z_B(p) = \underline{\hspace{10cm}}$$

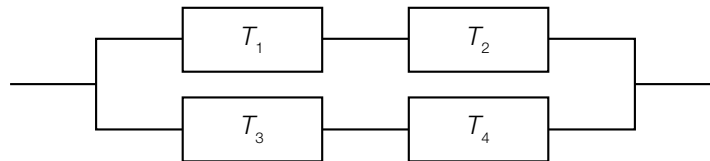
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion z_B auf dem Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend ist!

c) Gegeben sind die Systeme C und D:

System C:



System D:



Jedes der Bauteile T_1 , T_2 , T_3 und T_4 hat die gleiche Zuverlässigkeit p .

Die Zuverlässigkeit z_C des Systems C ist eine Funktion von p und wird durch die Funktionsgleichung $z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2$ beschrieben.

Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{1 - z_C(0,9)}{1 - z_C(0,8)}$ und interpretieren Sie diesen Wert für das System C!

Die Zuverlässigkeit z_D des Systems D ist eine Funktion von p .

Begründen Sie, warum $z_C(p) > z_D(p)$ für alle $p \in (0; 1)$ gilt!

Verwenden Sie dazu entweder eine Funktionsgleichung von z_D oder begründen Sie anhand der Bauart der Systeme C und D.

Lösungserwartung

a) $z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

mögliche Vorgehensweise:

$$1 - p_{\text{neu}}^2 = \frac{1 - 0,7^2}{4}$$

$$p_{\text{neu}} = \sqrt{0,8725} \approx 0,934$$

b) $z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:

Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.

Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1 | 1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$$z'_B(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0 \text{ für alle } p \in (0; 1)$$

oder:

$$z_B = 1 - (1 - p)^2$$

$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.

Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

c) $\frac{1 - z_C(0,9)}{1 - z_C(0,8)} \approx 0,254$

mögliche Interpretation:

Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:

$$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$$

$$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D .

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System D funktioniert, funktioniert auch System C . Außerdem funktioniert System C auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für einen richtigen Term für z_A . Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
 – Ein Punkt für die richtige Lösung.
 Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
 Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- b) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
 – Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z. B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.
- c) – Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
 Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
 – Ein Punkt für eine richtige Begründung.