

Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_041

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 1.2, FA 1.5, FA 4.3, AN 2.1, AN 3.3, AN 4.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + t \cdot x$. Für den Parameter t gilt: $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie die lokalen Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t an!

An der Stelle $x = t$ gelten für die Funktion f_t die Gleichungen $f_t(t) = 0$, $f'_t(t) = 0$ und $f''_t(t) = 2$.

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f_t bei $x = t$!

- b) Geben Sie diejenige Stelle x_0 in Abhängigkeit von t an, an der sich das Krümmungsverhalten von f_t ändert!

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Krümmungsverhalten des Graphen von f_t an der Stelle $x = 0$ unabhängig von der Wahl des Parameters t ist!

- c) Die Funktion A beschreibt in Abhängigkeit von t mit $t > 0$ den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und von der x -Achse im Intervall $[0; t]$ begrenzt wird. Die Funktion $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $t \mapsto A(t)$, ist eine Polynomfunktion.

Geben Sie den Funktionsterm und den Grad von A an!

Geben Sie das Verhältnis $A(t) : A(2 \cdot t)$ an!

- d) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f_{-1}(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt!

Erläutern Sie, wie der Graph der Funktion f_{-1} aus dem Graphen der Funktion f_1 hervorgeht!

Lösungserwartung

a) Mögliche Vorgehensweise:

$$f'_t(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$$

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{t}{3}; x_2 = t$$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$$f''_t(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$$

$$f''_t(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$f''_t(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t .

c) Mögliche Vorgehensweise:

$$A(t) = \int_0^t f_t(x) dx = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$$

d) Mögliche Vorgehensweise:

$$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$$

$$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \Rightarrow f_{-1}(x) = f_1(-x)$$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1} .

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.
- b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
- c) – Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A . Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.
- d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
– Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.