

Überlagerung von Schwingungen*

Aufgabennummer: 2_038

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, AN 4.2

Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Hertz (Hz) angegeben. Für die Frequenz f gilt: $f = \frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1 , h_2 und h_3 beschrieben.

Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$$

$$h_2(t) = \sin(2,5 \cdot \pi \cdot t)$$

$$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.

Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion p mit $p(t) = \bar{p} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind $\bar{p}$ und ω Konstanten.

Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert p_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) dt}$ berechnet werden.

Berechnen Sie den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\bar{p} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

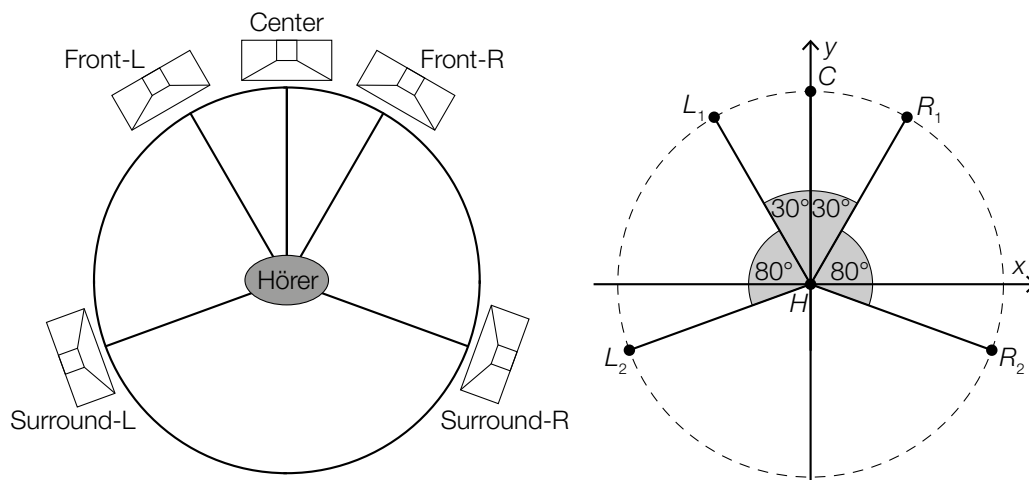
- b) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

Geben Sie die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

- c) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründen Sie, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1 , h_2 und h_3 ist!

- d) Für ein angenehmes Raumklingerlebnis (z. B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben). Vereinfacht kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:



Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/5.1> [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C , L_1 , L_2 , R_1 , R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt. Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

Geben Sie die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Geben Sie die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!

Lösungserwartung

a) $T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \Rightarrow T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$$

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1} \int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t) dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow p_{\text{eff}} \approx 0,71 \text{ Pa}$$

b) $T = 4 \text{ ms}$

Frequenz von h : $\frac{1}{0,004} = 250 \text{ Hz}$

c) Amplitude von h : ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:

Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1 , h_2 und h_3 , da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

d) $R_1 = (1 | \sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:

$$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Mögliche Vorgehensweise:

Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20^\circ) \approx 3,76 \text{ m}$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]
- b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h , wobei die Einheit „ms“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
- c) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung.
- d) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1 .
Toleranzintervall für die y -Koordinate: [1,7; 1,75]
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]

Geben Sie das kleinstmögliche Intervall W an, das alle Werte von r enthält.

$$W = \left[\underline{\hspace{2cm}} ; \underline{\hspace{2cm}} \right]$$