

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 2_037

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.5, FA 1.5, AN 3.2, AN 3.3

Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades schneidet die positive senkrechte Achse im Punkt $A = (0|y_A)$ und hat mit der positiven x -Achse den Punkt $B = (x_B|0)$ gemeinsam, wobei B ein Extrempunkt von f ist.

Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie an, ob c größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie an, ob b größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

- b) Gegeben ist folgende Aussage: „Der Punkt B ist ein Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' .“ Geben Sie an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Es gibt für alle Werte von b genau eine Stelle x_t mit folgender Eigenschaft: An der Stelle x_t haben f und f' die gleiche Steigung. Geben Sie diese Stelle x_t in Abhängigkeit von b an!

- c) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen b und c bestehen muss, damit die Extremstelle x_B von f auch Nullstelle von f ist!

Geben Sie die Koeffizienten b und c der Funktion f in Abhängigkeit von x_B an!

Lösungserwartung

a) $c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$. Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f . Da B auf der positiven x -Achse liegt, muss seine x -Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_E = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = -2 \cdot b$.

Wegen $x_E = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_E)$ mit $x_E > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührungspunkt mit der positiven x -Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

b) Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:

Da $B = (x_B | 0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f' .

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \Rightarrow \text{Die Steigung der Ableitungsfunktion } f' \text{ ist } \frac{1}{2}.$$

$$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \Rightarrow x_t = 1 - 2 \cdot b$$

c) Mögliche Vorgehensweise:

Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung

$\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot c}}{0,5} \Rightarrow c = b^2$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \Rightarrow b = \frac{-x_B}{2}$$

$$\text{Aus } c = b^2 \text{ folgt: } c = \frac{x_B^2}{4}.$$

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
 - Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
 - Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.
- c) – Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c . Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
 - Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B .