

Hopfen*

Aufgabennummer: 2_034

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.2, AN 3.2, AN 3.3, FA 1.5, FA 1.7, FA 2.2

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8$, $b = 15$ und $k = -0,46$ ermittelt.

Aufgabenstellung:

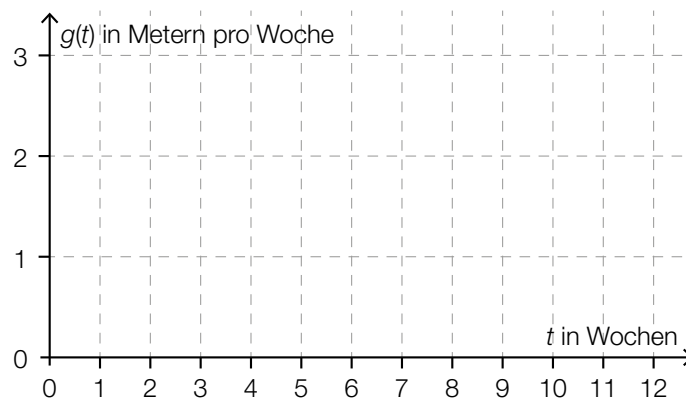
- a) Geben Sie unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechnen Sie unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe Ihres Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist, und geben Sie die prozentuelle Abweichung vom tatsächlich gemessenen Wert an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

- b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2 , zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g , die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



- c) Ermitteln Sie eine lineare Funktion h_1 , deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretieren Sie die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$$h_1(t) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Begründen Sie anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1 , warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1 !

- d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als $h_{\max}$ bezeichnet wird. Weisen Sie anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf $h_{\max}$ hat, und geben Sie $h_{\max}$ an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d. h., dass sie sich früher einem größeren Wert von $h_{\max}$ annähert. Geben Sie für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

Lösungserwartung

- a) möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$$h(10) - h(0) \approx 6,45$$

Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.

Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall $[0; 10]$ ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

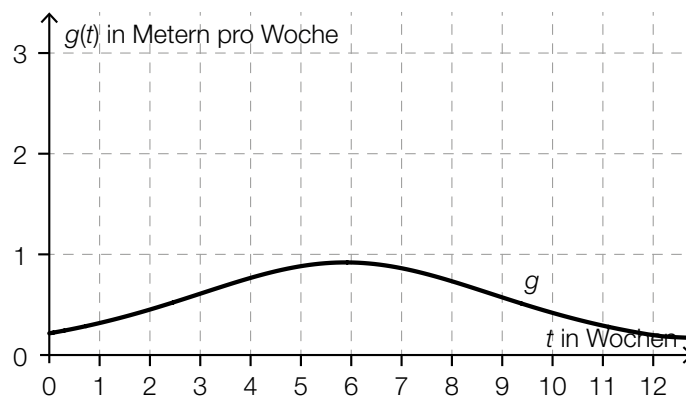
- b) Mögliche Gleichung:

$$h''(t) = 0 \Rightarrow t_2$$

$$t_2 \approx 5,9 \text{ Wochen}$$

$$h'(t_2) \approx 0,92$$

Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



- c) Mögliche Funktionsgleichung von h_1 :

$$h_1(t) = 0,58\dot{3} \cdot t + 0,6$$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1 , dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

d) Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{k \cdot t} = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist $h_{\max}$ unabhängig von k .

$$h_{\max} = a$$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung.
Toleranzintervall für den Wert: [6,4 m; 6,5 m]
- b) – Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche“ nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g .
Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]
- c) – Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die Steigung: [0,58; 0,59]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung.
Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k .