

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_033

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.3, AN 1.3, AN 4.2, AN 4.3, FA 4.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind.

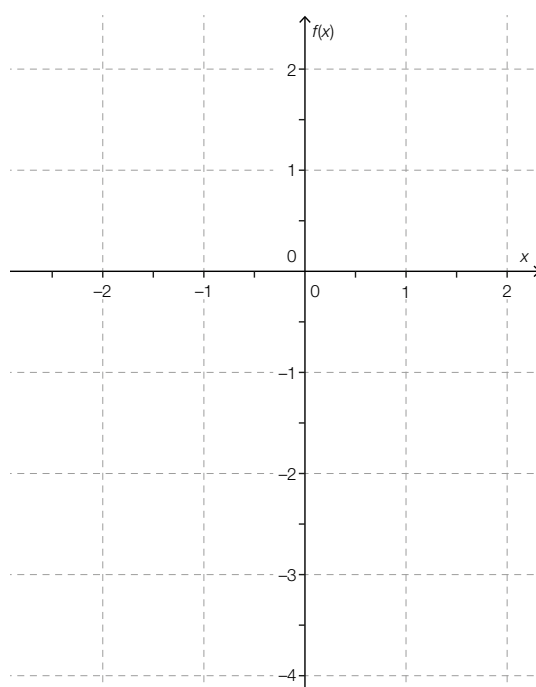
Aufgabenstellung:

- a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b . Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

- b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x) dx = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x) dx = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

a) Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$

Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.

Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.

$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \Rightarrow f'(0) = b$$

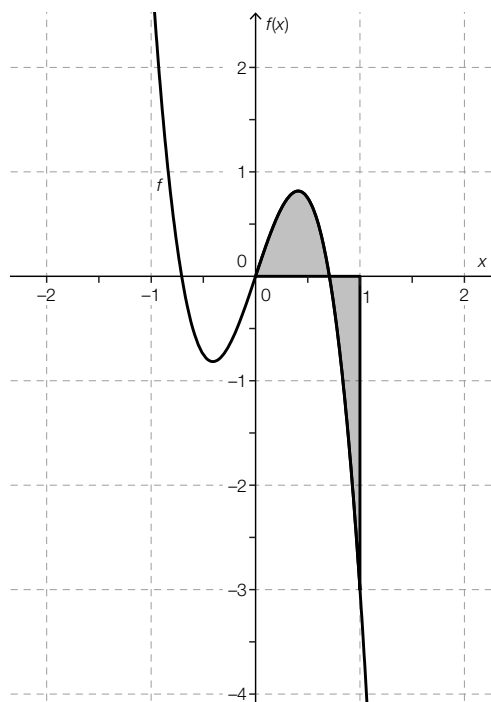
b) Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x) dx = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 0 \Rightarrow a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x -Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x -Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x -Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f :



Lösungsschlüssel

- a) – Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
 - Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- b) – Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b .
 - Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f . Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.