

Kettenlinie

Aufgabennummer: 2_030

Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.

Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.

Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ m.

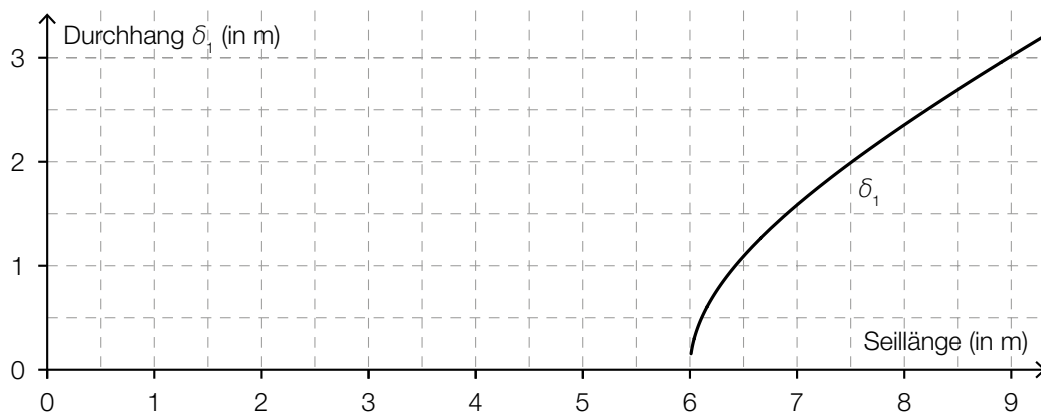
Aufgabenstellung:

- a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle!

Geben Sie eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

- b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ des durch f modellierten Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Durchhang!

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion δ_1 , der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Geben Sie mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermitteln Sie weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

- c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f .

Geben Sie alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermitteln Sie die Werte dieser Parameter!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

- d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen: Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f .

Drücken Sie alle gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h !

Möglicher Lösungsweg

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot (e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}) - 1$$

b) $\delta = f(3) - f(0)$

$$\delta \approx 1,2 \text{ m}$$

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.

$\delta_1(8,6) \approx 2,8 \Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

c) $g(0) = 4 = c$

$$g(3) = f(3) \approx 5,18 = 9 \cdot b + 4 \Rightarrow b \approx 0,13$$

größter vertikaler Abstand:

$$(g(x) - f(x))' = 0$$

d) $h(-3) = f(-3)$

$$h(0) = f(0)$$

$$h(3) = f(3)$$

$$h'(-3) = f'(-3)$$

$$h'(3) = f'(3)$$

$$h(x) \approx 0,0007 \cdot x^4 + 0,125 \cdot x^2 + 4$$